

Effets de la dépendance entre différentes branches sur le calcul des provisions

Thème ASTIN : Contrôle des risques

Gillet Antonin
Commission de Contrôle des Assurances
54, rue de Châteaudun
75009 PARIS
antonin.gillet@cca.finances.gouv.fr

Serra Benjamin
Commission de Contrôle des Assurances
54, rue de Châteaudun
75009 PARIS
benjamin.serra@cca.finances.gouv.fr

Les dépendances entre les risques en assurance non-vie peuvent être une des causes de la sous-tarification ou de provisions insuffisantes pour couvrir la charge de sinistre afférent à une année de survenance. Les risques peuvent être dépendants sous différents angles: risques dépendants au sein d'une même branche, ou encore types de risques dépendants... Ce rapport s'attache à étudier les dépendances entre deux sous-branches de l'assurance automobile, ainsi que leurs implications, en introduisant les copules qui permettent de décrire complètement la dépendance entre les différents risques. A l'aide de simulations, les conséquences de ces dépendances en terme de provisionnement pour sinistres restant à payer sont mises en évidence.

Mots-clés: copule, dépendance, modèle linéaire généralisé, provisions, théorie de la crédibilité, triangle de liquidation

Introduction

Dans la théorie classique RBC (Risk Based Capital), les risques auxquels sont soumis les compagnies d'assurance (risques assurés mais aussi autres risques encourus par l'assureur tels que les risques d'actifs) sont considérés comme indépendants. Cependant, intuitivement de nombreux exemples peuvent laisser penser que ce n'est pas le cas en pratique. Il apparaît alors nécessaire de s'intéresser à cette dépendance pouvant exister entre les variables aléatoires qui impactent le résultat d'une société d'assurance, et d'évaluer ses effets sur la santé financière de cette société, de manière à éventuellement déterminer de nouvelles règles prudentielles à appliquer en matière de solvabilité.

Un des principaux risques de dépendance auquel peut faire face une compagnie d'assurance est celui de la dépendance entre les sinistres des différentes branches. Il semble par exemple légitime de considérer que le montant des sinistres de la branche Dommage automobile n'est pas indépendant de celui de la branche Responsabilité Civile en automobile. En France, l'article R.331-26 du Code des Assurances prévoit que « *la provision pour sinistres restant à payer afférente aux opérations d'assurance des véhicules terrestres à moteur est estimée en procédant à une évaluation distincte: des sinistres corporels correspondant à des risques de responsabilité civile, des autres sinistres correspondant à des risques de responsabilité civile, des sinistres correspondant à des risques autres que ceux de responsabilité civile* ». En pratique, cette évaluation distincte se fait le plus souvent de façon indépendante, et l'objet de ce rapport est de montrer que la prise en compte de la dépendance entre les différentes branches a un impact sur l'incertitude du montant des provisions à constituer. La majorité des méthodes de calcul des provisions reposant sur les triangles de règlement des sinistres (ou triangles de liquidation), les triangles des différentes branches serviront à la modélisation des dépendances. De plus, les copules étant l'outil mathématique approprié pour étudier la structure de dépendance entre des variables aléatoires, l'objectif est d'appliquer cet outil aux triangles de règlement des sinistres.

1. Triangle de liquidation et calcul des provisions

1.1 Présentation du triangle de liquidation des sinistres

En assurance dommages, selon les branches considérées, les sinistres relatifs à un contrat sont constatés et payés plus ou moins longtemps après leur survenance. Le montant d'un sinistre en Responsabilité Civile à la suite d'un accident de la route est parfois fixé par une décision de justice. Or, certains procès peuvent n'aboutir que plus de dix ans après l'accident. Les prestations à payer par une compagnie d'assurance, relatives à une année de survenance, sont donc étalées sur plusieurs années de développement, et il est important pour la compagnie de conserver un historique de ces différents paiements. Dans la suite, les notations suivantes seront utilisées:

- i = indice de l'année de survenance du sinistre
- j = indice de l'année de développement (ou de déroulement), comptée à partir de l'année de survenance
- C_{ij} = montant des sinistres survenus l'année i et réglés l'année comptable $i + j$ (il s'agit d'un montant non cumulé, c'est-à-dire que la charge totale des sinistres de l'année de survenance i est égale à la somme des C_{ij} pour $j \geq 0$)

Conformément à ces notations, la sinistralité d'une branche peut être représentée d'une manière synthétique dans un triangle comme celui présenté ci-dessous pour la période de survenance 1997-2001 :

		Année de développement j				
		0	1	2	3	4
Année de survenance i	1997	$C_{97,0}$	$C_{97,1}$	$C_{97,2}$	$C_{97,3}$	$C_{97,4}$
	1998	$C_{98,0}$	$C_{98,1}$	$C_{98,2}$	$C_{98,3}$	
	1999	$C_{99,0}$	$C_{99,1}$	$C_{99,2}$		
	2000	$C_{00,0}$	$C_{00,1}$			
	2001	$C_{01,0}$				

1.2 Le triangle de liquidation, base du calcul des provisions

Du fait du décalage entre l'exercice de survenance d'un sinistre et l'exercice de règlement de ce sinistre, la réglementation prudentielle impose aux compagnies d'assurance d'estimer la charge future des sinistres afin de provisionner de quoi faire face à leurs engagements. L'article R.331-1 du Code des Assurances prévoit ainsi que les entreprises doivent être en mesure de justifier l'évaluation de « *provisions techniques suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagements vis-à-vis des assurés ou bénéficiaires de contrats* ». Pour cela, de nombreuses méthodes actuarielles ont été développées. Certaines sont imposées par la réglementation (méthode du coût moyen, par exemple), mais les entreprises d'assurance ont aussi la possibilité d'utiliser des méthodes statistiques qui leur sont propres.

La plupart de ces méthodes reposent sur les triangles de liquidation des sinistres. En effet, estimer les engagements futurs est équivalent à prévoir la partie inférieure au triangle de liquidation (plus, éventuellement, à compléter le triangle vers la droite suivant le nombre d'années nécessaires à la totale liquidation des sinistres):

$$\text{Provision} = \sum_{(i,j) \in \Delta} C_{ij}$$

où Δ est la partie complémentaire au triangle (partie inférieure, plus prolongement à droite).

Les actuaires s'appuient donc sur les triangles de liquidation qui résument la sinistralité passée pour estimer la sinistralité future par exercice de survenance. La méthode la plus répandue est celle dite de cadence des règlements, qui consiste à estimer des coefficients de passage entre les différentes années de développement en supposant que les années de survenance sont indépendantes entre elles, et que les années de développement sont les variables explicatives du comportement des règlements futurs.

Mais cette méthode, comme la majorité des méthodes utilisées, sont déterministes, si bien qu'aucune mesure de l'incertitude sur le calcul des provisions n'est possible. Seule l'espérance des réserves est calculée, tandis qu'aucune indication sur leur variabilité n'est donnée. D'autres méthodes, dites semi-paramétriques, ont été développées. Elles consistent à

faire des hypothèses sur l'espérance et la variance conditionnelle des sinistres. Mais elles ne permettent ni de vérifier la cohérence entre les hypothèses ni de les tester statistiquement. C'est pourquoi une approche paramétrique sera privilégiée dans la suite.

Plus précisément, les triangles de liquidation seront modélisés à l'aide d'un modèle linéaire généralisé (GLM) en introduisant un paramètre par année de survenance, un paramètre par année de déroulement, et un paramètre spécifique à la compagnie d'assurance. Cette approche permet de tester statistiquement le modèle, mais surtout d'associer une loi de probabilité à chacun des C_{ij} , pour les couples (i,j) observés, mais également pour les couples (i,j) non disponibles, et donc d'associer une distribution aux provisions, rendant possible le calcul de différentes mesures de risque.

1.3 Modélisation d'un triangle de liquidation par la méthode GLM

Données utilisées

Les données utilisées sont issues des états comptables réglementaires (états C11) de l'ensemble des compagnies d'assurance non vie soumises au contrôle de la Commission de Contrôle des Assurances. La modification du Plan Comptable en 1995 rend difficile l'utilisation des données antérieures à cette date. Enfin, les chiffres relatifs à 2001 n'étant pas définitifs à la date du début de cette étude, seuls les comptes des exercices 1995 à 2000 ont été exploités.

L'état C11 de l'exercice N présente les règlements effectués au cours de cette année N pour les sinistres survenus au cours des exercices comptables N, N-1, N-2, N-3, N-4, ainsi qu'un montant cumulé pour les sinistres survenus avant l'année N-4. Mais, l'étude concernant les montants non cumulés des sinistres, cette dernière valeur n'est pas utilisable. Les cinq autres valeurs représentent des paiements effectués au cours de la même année calendaire ($i+j$ constant dans le triangle de liquidation), elles constituent donc une diagonale dans le triangle de liquidation. Les six exercices comptables considérés permettent donc d'obtenir un ensemble de données constituant un « parallélogramme de liquidation » :

		Année de développement				
		0	1	2	3	4
Année de survenance	1991					$C_{91,4}$
	1992				$C_{92,3}$	$C_{92,4}$
	1993			$C_{93,2}$	$C_{93,3}$	$C_{93,4}$
	1994		$C_{94,1}$	$C_{94,2}$	$C_{94,3}$	$C_{94,4}$
	1995	$C_{95,0}$	$C_{95,1}$	$C_{95,2}$	$C_{95,3}$	$C_{95,4}$
	1996	$C_{96,0}$	$C_{96,1}$	$C_{96,2}$	$C_{96,3}$	$C_{96,4}$
	1997	$C_{97,0}$	$C_{97,1}$	$C_{97,2}$	$C_{97,3}$	
	1998	$C_{98,0}$	$C_{98,1}$	$C_{98,2}$		
	1999	$C_{99,0}$	$C_{99,1}$			
	2000	$C_{00,0}$				

Les montants C_{ij} retenus sont les montants nets de recours (montants bruts – recours IDA) de façon à n'utiliser que des données pertinentes. Pour des raisons pratiques, seules les valeurs positives ont été conservées. De plus, les triangles de liquidation de nombreuses entreprises ne sont pas totalement exploitables pour cause de données manquantes. Or, dans

la suite les estimations des lois se feront société par société. Ces estimations ne seront donc menées que sur les compagnies dont le nombre de données est suffisant. Cette sélection peut présenter le risque de constituer un échantillon constitué uniquement des plus grandes sociétés (ce sont souvent celles qui fournissent le plus de données), mais cela ne devrait pas amener de biais sur les résultats puisque l'on recherche une dépendance entre deux branches d'activité en général, et cela permet en plus d'éliminer certaines compagnies trop marginales. Les éventuels problèmes liés aux changements de nom des sociétés ou aux fusions de plusieurs entreprises ont été pris en compte dans la base de données.

Enfin, la dépendance entre les triangles de liquidation directement sur les montants cumulés peut apparaître discutable. Cette approche risque en effet de souffrir d'un effet « taille du portefeuille ». Si une dépendance positive devait être mise en évidence entre deux triangles de liquidation, il serait possible de penser que ce résultat s'explique par le fait qu'une compagnie qui commercialise au cours d'un exercice plus de contrats, devra faire face à une sinistralité accrue dans toutes ses branches simultanément. Or, ce qui est étudié et recherché dans ce rapport, c'est une dépendance entre les chocs de sinistralité, et non un effet du nombre de contrats commercialisés. C'est pourquoi, il est peut-être préférable d'utiliser des données homogénéisées qui permettent de s'affranchir de l'impact du volume du portefeuille. En plus de l'exploitation des montants (C_{ij}), la dépendance entre les taux de sinistres à primes (C_{ij} / P_i) où P_i représente la prime acquise à l'exercice de survenance i (données disponibles dans les états comptables C10) a également été étudiée.

Modélisation mise en œuvre

La modélisation GLM se fait par la donnée de deux éléments: l'un statistique, l'autre déterministe. La composante statistique précise la distribution à l'aide d'une fonction variance qui détermine la relation entre la variance et l'espérance (fonction V ci-dessous), tandis que l'élément déterministe associe une fonction de lien (fonction g ci-dessous) entre l'espérance des observations et une matrice de régresseurs X . Le modèle est donc le suivant:

- (C_{ij}) indépendants $\forall (i,j) \in D$
- $E(C_{ij}) = \mu_{ij}$
- $\text{Var}(C_{ij}) = \phi V(\mu_{ij})$
- $g(\mu_{ij}) = X_{ij} \beta$

où D est l'ensemble des données observées. Les régresseurs sont ici des variables indicatrices (une variable indicatrice par année de survenance, et une variable indicatrice par année de développement). Pour modéliser les montants des sinistres, il est possible d'utiliser des lois discrètes ou des lois continues, et par souci de simplification, on se limitera à une fonction de lien logarithme.

Les deux lois les plus utilisées pour modéliser des données discrètes sont la loi de Poisson (correspondant à la fonction $V(x) = x$), et la loi Binomiale Négative (correspondant à la fonction $V(x) = x^2/r + x$). La loi de Poisson présente l'avantage d'être facile d'utilisation et on peut montrer qu'il s'agit en fait de la loi sous-jacente à la modélisation très répandue du Chain-Ladder stochastique. Cependant, les mesures d'ajustement des modèles utilisant la loi de Poisson sont le plus souvent peu satisfaisantes. De plus, la loi de Poisson implique l'égalité entre l'espérance et la variance des données, alors qu'en pratique on constate une

sur-dispersion, ie une variance plus grande que l'espérance. C'est pourquoi la loi Binomiale Négative, qui respecte cette dernière propriété, sera également utilisée dans la suite.

Dans le cas continu, les lois les plus classiques sont la loi Normale ($V(x) = I$), la loi Inverse Gaussienne ($V(x) = x^3$), ainsi que la loi Gamma ($V(x) = x^2$). Dans la suite, c'est la loi Gamma qui sera systématiquement utilisée pour les modélisations en continu. Cette loi est en effet, en général, préférable à la loi Normale en matière d'ajustement aux données, et présente des résultats comparables avec ceux obtenus à l'aide de la loi Inverse Gaussienne, mais la distribution Gamma est plus simple d'utilisation en pratique.

2. Modélisation de la dépendance par les copules

2.1 Pourquoi un nouvel outil pour modéliser la dépendance ?

L'indicateur classique de dépendance, la corrélation, peut ne pas être suffisant pour modéliser la dépendance. Il ne constitue en effet qu'un indicateur du degré de dépendance, mais ne décrit pas à lui seul la totalité de la structure de dépendance.

Deux variables aléatoires peuvent par exemple être très dépendantes pour leurs valeurs extrêmes et faiblement pour des valeurs intermédiaires (dépendance en U), ou fortement dépendantes pour des valeurs élevées et faiblement pour les valeurs basses (dépendance en J), ou encore fortement dépendantes pour les valeurs basses et faiblement pour les valeurs élevées (dépendance en L). Toutes les variantes entre ces situations extrêmes sont possibles.

Dans le cas du calcul des provisions en assurance non-vie, le choix de cette structure est central. En effet, si ce calcul est effectué à l'aide d'un critère de type Value at Risk (VaR), c'est un quantile qui est recherché, et si la dépendance se situe au niveau des valeurs élevées (et que les lois sont à queues de distribution épaisses), le quantile sera plus élevé que si la dépendance est concentrée sur les valeurs intermédiaires. On ne peut donc pas se contenter d'une loi normale bivariée qui de plus n'a jamais été appropriée dans la modélisation des sinistres en assurance. Il est donc primordial d'utiliser un outil qui permet de choisir quelle est la structure de dépendance qui correspond au mieux au cas des triangles de liquidation. C'est pourquoi, dans la suite la dépendance entre les triangles de liquidation sera modélisée à l'aide des copules qui sont la forme mathématique pertinente de l'étude de la dépendance.

2.2 Présentation des copules

Définition et théorème d'existence

Une copule C de dimension deux est une fonction ayant les propriétés suivantes:

- son domaine de définition est I^2 avec $I = [0; 1]$,
- C est bornée et 2-croissante, ie pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in I^4$, tel que $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$, $C(x_2, y_2) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_1, y_1) \geq 0$,
- pour tout $u \in I$ et tout $v \in I$, $C(u, 1) = u$ et $C(1, v) = v$.

Le théorème de Sklar est le théorème fondamental de la théorie des copules en montrant leur existence et leur unicité dans certains cas.

Théorème de Sklar: Soit $H(u;v)$ une distribution jointe de dimension 2 dont les lois marginales sont F et G . Il existe alors une copule notée C telle que pour tout couple $(x ;y) \in \mathfrak{R}^2$:

$$H(x; y) = C(F(x);G(y))$$

Si de plus, F et G sont continues, C est unique.

Les copules permettent donc de séparer l'étude des lois marginales d'une part, et de la structure de dépendance d'autre part. Le théorème de Sklar s'étend à des lois jointes de dimension supérieure à deux. On obtient alors des copules de dimension égale à la dimension de la loi jointe.

Les grandes familles de copules

Il existe une multitude de copules permettant de caractériser l'ensemble des structures de dépendance possibles. Cependant, seul le sous-ensemble des copules paramétriques sera exploité dans la suite. Cet ensemble est constitué de nombreuses familles (cf annexe 1 par exemple) qui offrent une diversité suffisante pour modéliser toutes les structures de dépendance les plus courantes. On distinguera les familles de copules à un paramètre, et celles à deux paramètres. Toutes ces copules doivent être comparées à la copule indépendante (définie par $C(u,v) = uv$), caractéristique de deux variables aléatoires non dépendantes.

Estimation des paramètres des copules

Le choix d'une copule parmi un sous-ensemble de familles paramétriques se déroule en deux étapes. Tout d'abord, il est déterminé à l'intérieur de chaque famille quelle est la copule la plus appropriée. Puis, c'est parmi cette liste de meilleures copules qu'est choisie la copule optimale. Pour choisir la meilleure copule de chaque famille, et donc pour estimer le(s) paramètre(s) de cette copule, différentes méthodes sont à disposition.

La première méthode est celle dite du Maximum de Vraisemblance. Cette méthode consiste à choisir des lois marginales et une copule paramétriques, et à maximiser la vraisemblance des observations sur l'ensemble des paramètres (ceux des lois marginales et celui ou ceux de la copule). Ce procédé fournit alors des estimateurs sans biais, convergents et asymptotiquement normaux. Mais la maximisation de la vraisemblance peut se révéler difficile lorsque le nombre de paramètres est très élevé. C'est pourquoi il est souvent préférable d'utiliser une autre méthode.

Une seconde possibilité est de séparer l'estimation des paramètres des lois marginales et ceux de la copule. En effet, la vraisemblance des observations d'une seule variable aléatoire peut s'écrire sans avoir à spécifier la copule. Il est donc possible d'estimer les paramètres des lois marginales par maximum de vraisemblance classique. La vraisemblance globale des observations est ensuite écrite en remplaçant les paramètres des lois marginales par leurs estimateurs, et enfin maximisée par rapport aux paramètres de la copule. Cette méthode, connue sous le nom d'IFM (*Inference Functions for Margins*, cf [3] pour plus de détails), aboutit à un estimateur également convergent, asymptotiquement normal et sans biais, mais présente des propriétés statistiques différentes de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Enfin, une autre méthode qui sera utilisée dans la suite repose sur l'utilisation des mesures de concordance comme le taux de Kendall par exemple. Par définition, le coefficient de corrélation de Kendall de deux variables aléatoires X_1 et X_2 est:

$$\tau(X_1, X_2) = \Pr\{(X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) > 0\} - \Pr\{(X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) < 0\}$$

où (X_1^*, X_2^*) et (X_1, X_2) sont indépendants et de même loi. Ce coefficient, contrairement au coefficient de corrélation linéaire de Pearson, ne dépend pas des lois marginales. Il s'exprime uniquement en fonction de la copule. Il est donc révélateur de la structure de dépendance. De plus, pour certaines copules paramétriques, ce taux de Kendall peut être exprimé facilement en fonction du paramètre de la copule. Il est donc possible d'utiliser le taux de Kendall pour estimer le paramètre de la copule.

2.3 Les copules appliquées aux triangles de liquidation

Hypothèses

Cette étude se limite au cas de la dépendance entre deux branches $B1$ et $B2$, mais pourrait se généraliser à plus de deux branches. Les notations suivantes seront adoptées:

c_{ij}^1	= élément (i, j) du triangle de liquidation de la branche $B1$
c_{ij}^2	= élément (i, j) du triangle de liquidation de la branche $B2$
C_{ij}^1 et C_{ij}^2	= les variables aléatoires associées
F_{ij}^1 et F_{ij}^2	= les fonctions de répartition associées

Il sera supposé que la dépendance entre les triangles de liquidation se situe au niveau des éléments ayant la même place dans chacun des triangles: les montants des sinistres des branches $B1$ et $B2$ payés au cours d'une même année comptable et rattachés à un même exercice de survenance sont dépendants entre eux, mais indépendants de tous les autres montants:

$$\mathbf{H1: } C_{ij}^1 \text{ et } C_{kl}^2 \text{ indépendants si } (i,j) \neq (k,l)$$

La dépendance entre les deux triangles sera également modélisée de façon identique quelle que soit l'année de survenance et quelle que soit l'année de développement. Puisque d'après le théorème de Sklar (cf 2.2), cette dépendance peut s'exprimer à l'aide d'une copule C , cette hypothèse peut se réécrire:

$$\mathbf{H2: } P(C_{ij}^1 \leq c_{ij}^1, C_{ij}^2 \leq c_{ij}^2) = C(F_{ij}^1(c_{ij}^1), F_{ij}^2(c_{ij}^2)) \quad \forall (i,j)$$

Enfin, la dépendance qui existe entre les triangles de liquidation sera supposée liée à la nature même des branches considérées, et non aux caractéristiques intrinsèques des compagnies étudiées. Cela signifie donc que la structure de dépendance entre les triangles de liquidation pourra être modélisée par le biais d'une seule et même copule valable pour toutes les sociétés d'assurance. Cette hypothèse permet de choisir la copule adéquate à partir d'un nombre de données plus important puisque les éléments des triangles de toutes les compagnies pourront être utilisés, sans avoir à se contenter d'une seule société.

Le choix de la copule

Le choix empirique de la copule dépend des lois marginales spécifiées pour les éléments des triangles de liquidation. C'est pourquoi, la copule optimale sera recherchée dans différentes situations, en fonction des lois marginales utilisées. Il sera ainsi possible d'étudier à quel point les différentes structures de dépendance trouvées diffèrent ou non les unes des autres. Dans le cas où une structure de dépendance identique serait mise en évidence, cela renforcerait les résultats de l'étude.

Modélisation des C_{ij} par des lois Binomiales Négatives

Les éléments des triangles de liquidation ont dans un premier temps été modélisés à l'aide de lois Binomiales Négatives qui sont des lois discrètes. Le théorème de Sklar ne nous permet pas alors de conclure à l'unicité de la copule. On se contentera donc de chercher une copule meilleure que les autres qui pourrait modéliser la structure de dépendance étudiée. « La » copule optimale sera recherchée parmi le sous-ensemble des copules paramétriques présenté en annexe, ce qui permet l'utilisation de la méthode du Maximum de Vraisemblance.

La vraisemblance des observations (pour une seule compagnie), en notant D l'ensemble des observations disponibles, est donnée par:

$$P\{(C_{ij}^1, C_{ij}^2) = (c_{ij}^1, c_{ij}^2), (i, j) \in D\} = \prod_{(i,j) \in D} P(C_{ij}^1 = c_{ij}^1, C_{ij}^2 = c_{ij}^2)$$

par indépendance des éléments d'un même parallélogramme (cf 1.3) et des éléments des deux triangles n'ayant pas les mêmes coordonnées (hypothèse H1). De plus, les C_{ij}^1 et les C_{ij}^2 sont des variables aléatoires à lois discrètes. On a donc:

$$\begin{aligned} P(C_{ij}^1 = c_{ij}^1, C_{ij}^2 = c_{ij}^2) &= P(C_{ij}^1 \leq c_{ij}^1, C_{ij}^2 \leq c_{ij}^2) \\ &- P(C_{ij}^1 \leq c_{ij}^1 - 1, C_{ij}^2 \leq c_{ij}^2) \\ &- P(C_{ij}^1 \leq c_{ij}^1, C_{ij}^2 \leq c_{ij}^2 - 1) \\ &+ P(C_{ij}^1 \leq c_{ij}^1 - 1, C_{ij}^2 \leq c_{ij}^2 - 1) \end{aligned}$$

D'où, par application de H2, en notant C la copule modélisant la structure de dépendance des deux triangles:

$$\begin{aligned} P(C_{ij}^1 = c_{ij}^1, C_{ij}^2 = c_{ij}^2) &= C(F_{ij}^1(c_{ij}^1), F_{ij}^2(c_{ij}^2)) \\ &- C(F_{ij}^1(c_{ij}^1 - 1), F_{ij}^2(c_{ij}^2)) \\ &- C(F_{ij}^1(c_{ij}^1), F_{ij}^2(c_{ij}^2 - 1)) \\ &+ C(F_{ij}^1(c_{ij}^1 - 1), F_{ij}^2(c_{ij}^2 - 1)) \end{aligned}$$

En notant $P_{ij} = P(C_{ij}^1 = c_{ij}^1, C_{ij}^2 = c_{ij}^2)$, θ le vecteur des paramètres à estimer, et en passant au logarithme, la log-vraisemblance $L(\theta)$ des observations pour une compagnie s'écrit donc:

$$L(\theta) = \sum_{(i,j) \in D} \ln(P_{ij})$$

Enfin, en supposant que les différentes compagnies sont indépendantes, il suffit de sommer sur les différentes sociétés pour obtenir le critère à maximiser.

Cette expression de la vraisemblance pourrait être utilisée pour estimer en une seule étape les paramètres des lois marginales en même temps que le(s) paramètre(s) de la copule. Cependant, il existe un nombre important de paramètres correspondant aux lois marginales. Seize paramètres par compagnie sont en effet estimés. Ce nombre peut éventuellement être réduit si l'on impose des paramètres par année de survenance identiques ou encore des cadences de règlement (et donc des paramètres par année de développement) semblables pour chaque compagnie, mais il restera toujours au minimum un paramètre par société. Il est donc préférable de privilégier une estimation en deux étapes.

Dans un premier temps, on estime les lois marginales conformément à la méthode décrite au 1.3, puis dans un second temps on estime le(s) paramètre(s) de la copule: c'est la méthode IFM (cf supra). L'estimateur obtenu par cette méthode présente des propriétés statistiques légèrement différentes de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Par souci de simplification, on supposera alors que les valeurs des paramètres des lois marginales trouvées au cours de la première étape sont les vraies valeurs (et non des estimateurs), ce qui permet d'obtenir dans la seconde étape un estimateur du maximum de vraisemblance classique. D'une manière rigoureuse, cela revient à travailler conditionnellement au fait que les paramètres des lois marginales sont égaux à leurs estimateurs.

La maximisation de l'expression de la log-vraisemblance a été réalisée pour les grandes familles de copules présentées en annexe dans le cas des branches responsabilité civile en automobile (RC) et automobile hors responsabilité civile (HRC). Les résultats sont présentés dans le Tableau 1.

Famille de copules	Paramètre(s) estimé(s)		-Log Vraisemblance
<i>Correlated Frailty</i>	$a = 9,04$	$p = 0,19$	17526,2
<i>Gumbel</i>	$\alpha = 1,02$		17541,0
<i>Clayton</i>	$\alpha = 0,04$		17541,0
<i>Frailty</i>	$\alpha = 0,04$		17541,0
<i>Frank</i>	$\alpha = -0,02$		17541,8
<i>Ali-Mikhail-Haq</i>	$\theta = 0,10$		17541,8
<i>Indépendance</i>	-		17541,9

Tableau 1: Résultats des estimations par Maximum de Vraisemblance
 $C_{ij} \sim$ lois Binomiales Négatives / Branches RC et HRC

La première constatation est que c'est le cas indépendant qui fournit la valeur de la log-vraisemblance la plus faible. Intégrer une structure de dépendance accroît la vraisemblance des observations, ce qui semble donc confirmer que les données étudiées ne sont pas indépendantes. Parmi les familles de copules étudiées, c'est la famille *Correlated Frailty* qui maximise la vraisemblance. C'est donc cette famille qui sera retenue pour effectuer les simulations dans la suite. Cependant, le critère du maximum de vraisemblance n'est pas suffisant pour le choix de la copule car il ne tient pas compte de l'impact du nombre de paramètres de la copule. En effet, la vraisemblance a tendance à croître lorsque l'on

augmente le nombre de paramètres. C'est pourquoi, une série de tests statistiques permet également de confirmer que cette famille est significativement meilleure que les autres.

La méthodologie associée à ces tests est décrite dans [2]. Par exemple, si l'hypothèse H_0 : « Famille *Gumbel* » est testée contre H_a : « Famille *Correlated Frailty* », en notant L_0 la vraisemblance des observations obtenue avec la famille de copules *Gumbel*, et L_a celle obtenue avec la famille *Correlated Frailty*, c'est la statistique T suivante qui sera considérée:

$$T = -2 \ln [L_0 / L_a]$$

Cette statistique de test suit asymptotiquement une loi du χ^2 à r degrés de libertés, où r est le nombre de paramètres du « modèle complet » (cf [2]) moins celui du modèle restreint, dans ce cas précis $r = 4 - 1 = 3$. L'hypothèse sera rejetée à un niveau de significativité d'au moins α quand $T > \chi^2(r ; \alpha)$. Le Tableau 2 résume les résultats du test de l'hypothèse H_a : « Famille *Correlated Frailty* » contre l'hypothèse H_0 : « autre famille », à un niveau de significativité de 5%. L'ensemble de ces tests renforcent le choix de la famille *Correlated Frailty* pour modéliser la structure de dépendance entre les branches *RC* et *HRC*.

<i>H_a: Correlated Frailty</i>				
<i>H₀</i>	<i>T</i>	<i>R</i>	$\chi^2(r ; 0,05)$	Décision
<i>Gumbel</i>	29,6	3	7,81	Rejet de H_0
<i>Clayton</i>	29,6	3	7,81	Rejet de H_0
<i>Frailty</i>	29,6	3	7,81	Rejet de H_0
<i>Frank</i>	31,2	3	7,81	Rejet de H_0
<i>Ali-Mikail-Haq</i>	31,2	3	7,81	Rejet de H_0
<i>Indépendance</i>	31,4	4	9,49	Rejet de H_0

Tableau 2: Tests de l'hypothèse H_a : « Famille *Correlated Frailty* » contre diverses H_0

Modélisation des C_{ij} par des lois Gamma

Les éléments des triangles de liquidation ont ensuite été modélisés à l'aide de lois Gamma. Ces lois sont continues, et le théorème de Sklar permet donc d'invoquer l'unicité de la copule recherchée. La méthodologie utilisée pour rechercher cette copule est la même que dans le cas des lois discrètes, mais l'expression de la vraisemblance est différente.

La vraisemblance des observations (pour une seule compagnie), en notant D l'ensemble des observations possibles, est, par indépendance des éléments d'un même parallélogramme (cf 1.3) et des éléments des deux triangles n'ayant pas les mêmes coordonnées (hypothèse H1):

$$P\{(C_{ij}^1, C_{ij}^2) = (c_{ij}^1, c_{ij}^2), (i, j) \in D\} = \prod_{(i,j) \in D} f_{ij}(c_{ij}^1, c_{ij}^2)$$

où f_{ij} est la densité du couple (C_{ij}^1, C_{ij}^2) . En notant C la copule modélisant la structure de dépendance des deux triangles (hypothèse H2):

$$f_{ij}(c_{ij}^1, c_{ij}^2) = \frac{\partial^2 C(F_{ij}^1(c_{ij}^1), F_{ij}^2(c_{ij}^2))}{\partial u \partial v} f_{ij}^1(c_{ij}^1) f_{ij}^2(c_{ij}^2)$$

où ∂u (resp. ∂v) est la différentielle par rapport au premier (resp. second) argument de la copule. En notant $f_{ij} = f_{ij}(c_{ij}^1, c_{ij}^2)$, θ le vecteur des paramètres à estimer, et en passant au logarithme, la log-vraisemblance $L(\theta)$ des observations pour une compagnie s'écrit donc:

$$L(\theta) = \sum_{(i,j) \in D} \ln(f_{ij})$$

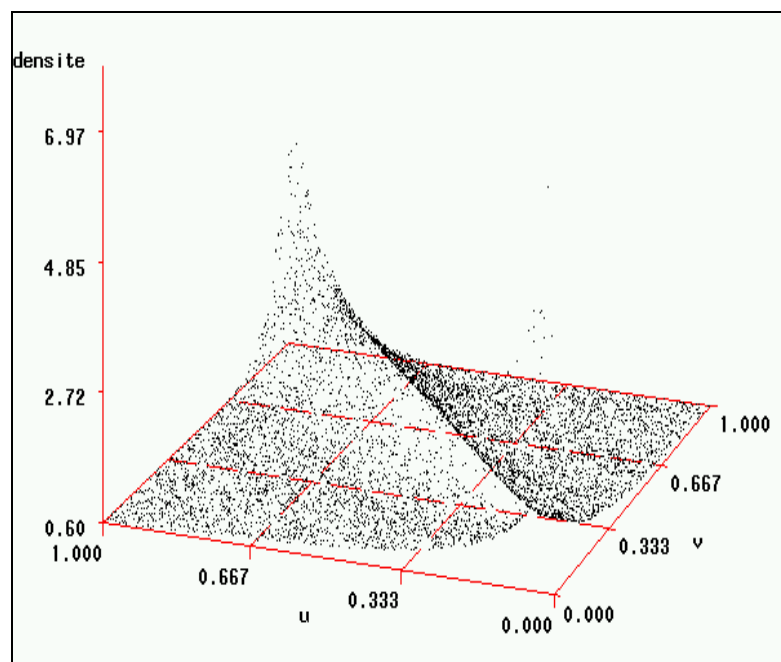
Enfin, en supposant que les différentes compagnies sont indépendantes, il suffit de sommer sur les différentes sociétés pour obtenir le critère à maximiser.

Le tableau 3 résume les résultats de la maximisation de l'expression de la log-vraisemblance pour les différentes familles de copules dans le cas des branches *RC* et *HRC*.

Famille de copules	Paramètre(s) estimé(s)		Log Vraisemblance
<i>Correlated Frailty</i>	$a = 7,89$	$p = 0,41$	89,9
<i>Frank Généralisée</i>	$\alpha = -2,34$	$\xi = 1,53$	56,1
<i>Frank</i>	$\alpha = -2,39$		53,4
<i>Gumbel</i>	$\alpha = 1,28$		52,6
<i>Ali-Mikhail-Haq</i>	$\theta = 0,68$		43,2
<i>Heavy Right Tail</i>	$\alpha = 2,21$		38,6
<i>Clayton</i>	$\alpha = 0,19$		20,0
<i>Frailty</i>	$\alpha = 0,17$		20,0
<i>Indépendance</i>	-		0

Tableau 3: Résultats des estimations par Maximum de Vraisemblance
C_{ij} ~ lois Gamma / Branches RC et HRC

Dans ce cas également, c'est l'utilisation de la famille *Correlated Frailty* qui maximise la log-vraisemblance, et le cas indépendant fournit la vraisemblance la plus faible. Comme précédemment, des tests statistiques ont été mis en œuvre et ont confirmé ces résultats.



Graphe 1: Graphe de la densité de la copule *Correlated Frailty*

L'effet du nombre de contrats ne peut être invoqué pour expliquer ces résultats. L'étude sur les taux de sinistralité (C_{ij} / P_i) fournit en effet des estimations comparables à celle réalisée sur les montants des sinistres directement. Il s'agit donc bien d'une dépendance de la sinistralité entre les deux branches qui est ici mise en évidence. A l'aide de la copule déterminée précédemment, il est maintenant possible de chiffrer les conséquences de la dépendance entre les triangles de liquidation sur le montant des provisions.

3 Impact sur le calcul des provisions

3.1 Méthodologie retenue

Pour évaluer l'impact de la prise en compte de la dépendance entre les triangles de liquidation, le montant total des sinistres (sinistres *RC* + sinistres *HRC*) sera évalué d'abord en supposant que les branches sont indépendantes, puis en tenant compte de la dépendance. A partir des lois des différents éléments des triangles, il est possible de connaître la distribution du montant total des sinistres restant à payer (somme des éléments des parties inférieures des triangles), et donc de calculer les provisions nécessaires et de comparer un certain nombre de mesures de risque.

Dans une première approche, il a été décidé de ne pas prendre en compte le prolongement à droite du triangle, indispensable en pratique à l'évaluation des provisions réglementaires. Cela signifie donc que seule la dépendance entre les montants de sinistres réglés au cours des cinq premières années sera étudiée, mais cela n'est pas de nature à modifier les conclusions de cette étude.

<i>RC</i>	0	1	2	3	4
1996					
1997					
1998				<i>provision</i>	
1999				<i>RC</i>	
2000					

<i>HRC</i>	0	1	2	3	4
1996					
1997					
1998				<i>provision</i>	
1999				<i>HRC</i>	
2000					

Le calcul explicite des lois des sommes des sinistres étant trop complexe, les distributions ont été obtenues par simulation. Chacune des simulations se déroule en trois grandes étapes:

- 1^{ère} étape* simulation des éléments de la partie inférieure du triangle *HRC* à l'aide des lois obtenues par la méthode décrite en 1.3; ces éléments sont gardés en mémoire pour être utilisés au cours de la 2^{ème} étape; ils sont ensuite sommés pour obtenir les sinistres restant à payer *HRC* (SAP_{HRC}).
- 2^{ème} étape* simulation des éléments de la partie inférieure du triangle *RC* à l'aide des lois obtenues en 1.3 et de la copule choisie selon la méthode décrite plus haut, c'est-à-dire que ces éléments sont calculés conditionnellement aux éléments du triangle *HRC*; on obtient ainsi les sinistres restant à payer *RC* conditionnellement à ceux de la branche *HRC* ($SAP_{RC/HRC}$).
- 3^{ème} étape* simulation des éléments de la partie inférieure du triangle *RC* avec la même méthode qu'à la première étape, mais indépendamment des deux étapes précédentes; on obtient SAP_{RC} .

On pose alors:

$$SAP_{\text{indépendance}} = SAP_{HRC} + SAP_{RC}$$

$$SAP_{\text{dépendance}} = SAP_{HRC} + SAP_{RC/HRC}$$

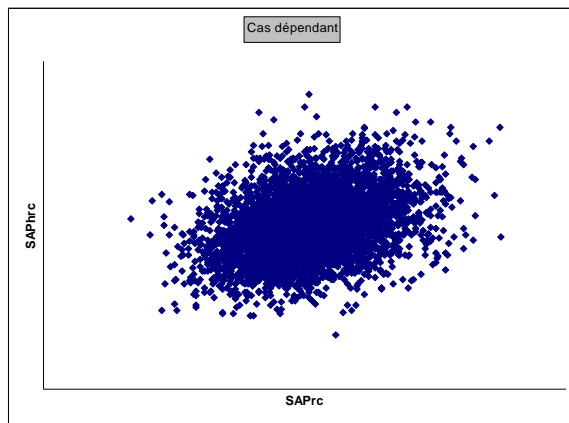
3.2 Résultats et interprétation

Les résultats qui suivent ont été calculés à partir d'un échantillon de 5000 couples ($SAP_{\text{indépendance}}$; $SAP_{\text{dépendance}}$) obtenus par simulation comme expliqué précédemment. Le tableau 4 présente quelques statistiques de base relatives à ces deux situations pour une compagnie dont les montants ont été modélisés par des lois Gamma et la copule appartient à la famille *Correlated Frailty*. Les données de cette compagnie ont été multipliées par un coefficient *c* qui ne sera pas divulgué pour des raisons de confidentialité.

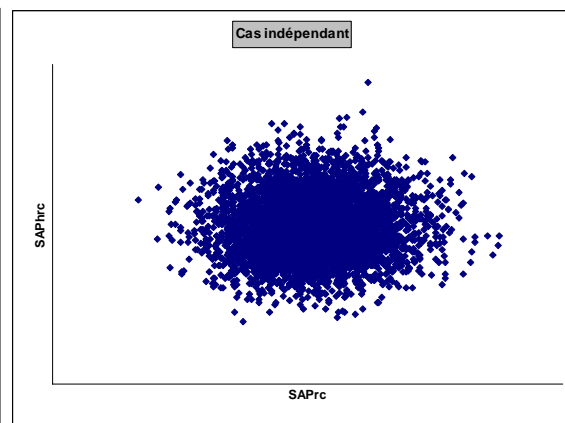
	$SAP_{\text{indépendance}}$	$SAP_{\text{dépendance}}$
Moyenne	730	730
Variance	5439	6606
Minimum	545	524
Maximum	1115	1217

Tableau 4: Statistiques de base

La prise en compte de la dépendance ne modifie donc pas la moyenne des sinistres à payer. Ce résultat est logique puisque l'espérance est une fonction additive et l'espérance de deux variables aléatoires, même non indépendantes, est égale à la somme de leur espérance. Par contre, la variance du montant total des sinistres est beaucoup plus grande lorsque les deux branches sont supposées positivement dépendantes, que lorsqu'elles sont supposées indépendantes. Le minimum et le maximum montrent que cette sur-dispersion est valable aux deux extrêmes de la distribution. Cette situation résulte de la copule utilisée pour modéliser la dépendance entre les deux triangles. En effet, le paramètre a de la copule *Correlated Frailty* est positif, ce qui s'interprète comme le signe d'une dépendance positive: quand les montants des sinistres *HRC* sont élevés (resp. faibles), ceux de la branche *RC* ont plus de risque d'être élevés (resp. faibles) eux aussi. La représentation des couples $(SAP_{HRC}; SAP_{RC})$ et $(SAP_{HRC}; SAP_{RC|HRC})$ sur les Graphes 2 et 3 illustrent parfaitement cette dépendance positive. Le cas dépendant est caractérisé par un nuage de points circulaire, tandis que la simulation à l'aide de la copule fournit un nuage de points plus allongé et pointu aux deux extrémités.

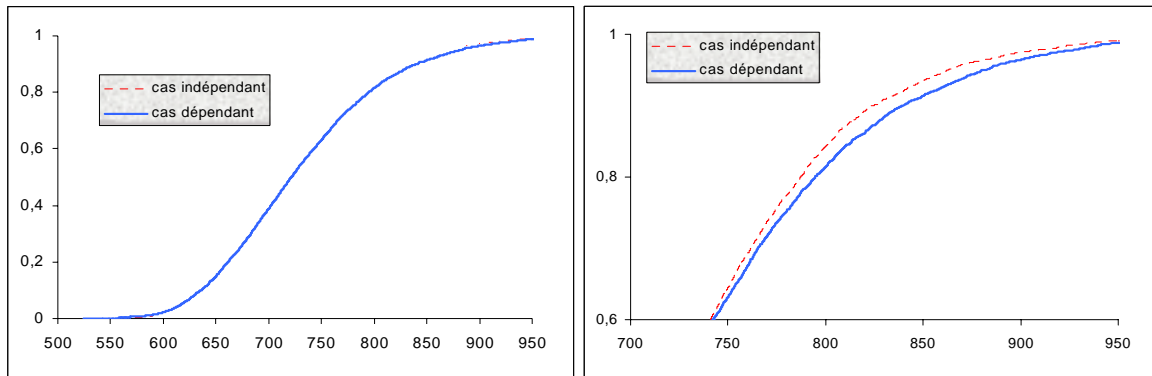


Graphe 2: Cas dépendant



Graphe3: Cas indépendant

Cette dépendance positive sur les sinistres a un impact direct sur le montant des capitaux à provisionner pour que la compagnie soit en mesure de faire face à ses engagements. Les provisions peuvent par exemple être déterminées de manière à ce que la probabilité de ruine (ici, la probabilité que le montant des sinistres futurs soit supérieur au montant des provisions constituées) soit inférieure à un certain seuil. Or, en comparant les fonctions de distribution (cf Graphes 4 et 5), il apparaît que la fonction correspondant au cas dépendant se situe au-dessous de celle correspondant au cas indépendant pour les valeurs les plus élevées (en fait, les courbes se croisent en un seul point, et compte tenu du fait que l'espérance est la même dans les deux cas, cela signifie que le risque associé au cas dépendant est plus risqué, au sens de la dominance stochastique d'ordre 2, que le risque associé au cas indépendant). Cela signifie donc que si la probabilité de ruine est fixée à un niveau suffisamment faible, les provisions à constituer vont être plus élevées dans le cas dépendant que dans le cas indépendant, et l'écart entre les deux situations est d'autant plus élevé que la constitution des provisions est prudente (c'est-à-dire que la probabilité de ruine est fixée à un niveau faible). Le Tableau 5 résume les capitaux nécessaires dans les deux cas en fonction du risque toléré.



Graphes 4 et 5: Comparaison des fonctions de distribution des sinistres restant à payer

seuil de probabilité de ruine	provisions à constituer	
	<i>Cas indépendant</i>	<i>cas dépendant</i>
15%	802	813
10%	824	839
5%	862	882
1%	942	958
0,1%	1022	1060

Tableau 5: Provisions P à constituer en fonction du seuil α de la probabilité de ruine toléré $P = \text{Inf} \{x / \text{Pr}(\text{SAP} > x) \leq \alpha\}$

4. Limites et extensions

4.1 Limites de la modélisation

La première limite de la modélisation décrite précédemment se situe au niveau des données utilisées pour calibrer le modèle. On dispose en effet d'un nombre insuffisant de données (éléments des triangles) pour estimer de manière totalement fiable les paramètres. Ce nombre de données est d'autant plus faible que les états C11 réglementaires ne conservent la trace que de cinq années de développement, ce qui ne permet pas de modéliser correctement l'évolution des sinistres au-delà de ces cinq ans. Cela est particulièrement problématique dans le cas des branches longues où les sinistres peuvent n'être réglés intégralement que plus de dix ans après leur survenance (comme c'est le cas pour la branche responsabilité civile en automobile).

Aux restrictions sur la quantité d'information s'ajoute la qualité de l'information. En plus du fait que les états C11 ne sont pas toujours correctement renseignés par les sociétés, les données, pour être exploitables, doivent être cohérentes entre elles. Ce problème est fortement lié à celui du choix de la période historique considérée. Si l'environnement du marché évolue, le mode de règlement des sinistres se modifie, si bien que l'historique ne permet pas de modéliser les sinistres futurs. Une solution pour résoudre ce problème est de tenir compte de l'inflation des sinistres: les montants des sinistres étant actualisés, cela permet de travailler avec un ensemble cohérent de données.

Le choix des lois retenues pour modéliser les éléments des triangles peut également être discuté. En effet, l'étude précédente se restreint à des lois Binomiales Négatives ou à des lois Gamma, alors que les modèles linéaires généralisés permettraient d'exploiter d'autres lois, classiques ou moins classiques. Cependant, les lois utilisées apportent tout de même des résultats relativement satisfaisants, et la structure de dépendance mise en évidence est robuste au choix de la loi marginale. De même, le choix de la copule est limité à l'intérieur du sous-ensemble des copules paramétriques. Mais il faut noter que cet ensemble est assez étendu pour modéliser l'ensemble des structures de dépendance rencontrées en pratique.

Mais la faiblesse la plus importante de la modélisation précédente est l'hypothèse d'indépendance des éléments d'un même triangle et l'indépendance entre les éléments de triangles différents qui n'ont pas une position similaire. Il n'est en effet pas satisfaisant de se contenter de modéliser la dépendance entre les différentes branches que nous l'avons fait jusqu'à maintenant. Cette modélisation est surtout limitée dans le cas de la dépendance entre deux branches dont les durées de développement sont différentes, comme par exemple la branche Dommage automobile (branche courte) où les sinistres sont réglés beaucoup plus rapidement que dans la branche Responsabilité Civile en automobile (branche longue). Ainsi, pour les années de développement supérieures à cinq, les éléments du triangle de la branche Dommage seraient très vite nuls tandis que ceux de la branche Responsabilité Civile seraient toujours des montants importants. Il est donc nécessaire de développer de nouveaux modèles plus satisfaisants et prenant en compte la dépendance de façon plus réaliste.

4.2 Evolution de la dépendance en fonction de l'année de développement

Nouvelles hypothèses

Pour tenter de répondre au principal défaut des modélisations précédentes, une première possibilité est d'estimer une copule par année de développement. Il sera toujours supposé que la dépendance entre les triangles de liquidation se situe au niveau des éléments ayant la même place dans chacun des triangles, mais la dépendance entre les deux triangles ne sera plus modélisée de façon identique quelle que soit l'année de développement. En effet, ceci permet de résoudre les problèmes liés à deux branches de durée de développement différentes (cf supra) pour lesquelles les montants des sinistres d'une branche peuvent rapidement devenir nuls et donc être totalement indépendants des montants de l'autre branche.

Ces hypothèses peuvent donc se réécrire comme suit:

H1: C_{ij}^1 et C_{kl}^2 indépendants si $(i,j) \neq (k,l)$

H2 bis: $P(C_{ij}^1 \leq c_{ij}^1, C_{ij}^2 \leq c_{ij}^2) = C_j(F_{ij}^1(c_{ij}^1), F_{ij}^2(c_{ij}^2)) \quad \forall (i,j)$

Chaque copule C_j modélisera donc la structure de dépendance l'année de survenance j . Enfin, on conservera l'hypothèse selon laquelle les structures de dépendance sont une caractéristique des branches, et non des sociétés. Une copule par année de développement sera donc à choisir pour toutes les sociétés.

Résultats

La méthode d'estimation des paramètres des copules inchangée. Les tableaux 6 et 7 résument ces estimations pour les trois meilleures (au sens de la log-vraisemblance la plus élevée) familles de copules dans chacune des trois situations suivantes:

- modélisation des montants des sinistres par une loi discrète,
- modélisation des montants des sinistres par une loi continue,

	Année de développement				
	0	1	2	3	4
Correlated Frailty	$a=7,79$ $p=0,47$ (-4639,2)	$A=3,69$ $p=0,16$ (-4438,5)	$a=14,57$ $p=0,00$ (-2606,6)	$a=9,30$ $p=0,10$ (-2198,8)	$a=10,55$ $p=0,36$ (-1974,9)
Gumbel	$\alpha = 1,42$ (-4650,8)	$\alpha = 1,09$ (-4438,5)	$\alpha = 1,00$ (-2606,7)	$\alpha = 1,01$ (-2199,7)	$\alpha = 1,02$ (-1986,0)
Frank	$\alpha = -1,98$ (-5219,7)	$\alpha = -0,48$ (-4968,0)	$\alpha = -0,40$ (-2744,9)	$\alpha = -0,21$ (-2398,1)	$\alpha = -0,39$ (-2205,9)

(les nombres entre parenthèses représentent la valeur de la log-vraisemblance)

Tableau 6: Résultats des estimations par Maximum de Vraisemblance
 $C_{ij} \sim$ lois Binomiales Négatives / Branches RC et HRC

	Année de développement				
	0	1	2	3	4
Correlated Frailty	$a=7,04$ $p=0,71$ (60,6)	$a=3,96$ $p=0,81$ (57,8)	$a=5,12$ $p=0,18$ (2,2)	$a=1,32$ $p=0,34$ (4,52)	$a=29,40$ $p=0,22$ (11,8)
Gumbel	$\alpha = 2,51$ (71,6)	$\alpha = 2,33$ (72,0)	$\alpha = 1,10$ (2,0)	$\alpha = 1,05$ (1,2)	$\alpha = 1,16$ (11,1)
Frank	$\alpha = -8,04$ (72,4)	$\alpha = -7,07$ (67,0)	$\alpha = -0,92$ (2,2)	$\alpha = -0,86$ (2,7)	$\alpha = -1,27$ (6,3)

(les nombres entre parenthèses représentent la valeur de la log-vraisemblance)

Tableau 7: Résultats des estimations par Maximum de Vraisemblance
 $C_{ij} \sim$ lois Gamma / Branches RC et HRC

On retrouve donc, comme précédemment, que globalement c'est la famille *Correlated Frailty* qui modélise le mieux la structure de dépendance entre les triangles de liquidation des branches RC et HRC, et ce, quelles que soient les lois marginales retenues. Mais cette modélisation apporte une information sur l'évolution du degré de dépendance en fonction de l'année de développement. Pour toutes les familles de copules utilisées, le paramètre de dépendance (a ou α , selon les familles) commence par décroître (en valeur absolue) lorsque l'année de développement augmente. Or, plus ce paramètre est élevé, plus grande est la dépendance. Cela signifie donc que les montants des sinistres (ainsi que les taux de sinistralité) des branches RC et HRC sont de moins en moins dépendants lorsque l'on s'éloigne de l'année de survenance. Cela est conforme à ce qui était attendu pour ces branches: en HRC, les sinistres sont réglés plus rapidement qu'en RC, et les éléments du triangle deviennent rapidement nuls et donc indépendants des montants du triangle RC. Mais on peut tout de même remarquer que pour la cinquième année de développement ($j = 4$), la dépendance semble retrouver un niveau élevé.

Cette évolution de la dépendance en fonction de l'année de développement se retrouve également au travers du paramètre p de la famille *Correlated Frailty*. En effet, cette famille est obtenue par combinaison de la copule indépendante et celle de *Clayton*, et c'est le paramètre p qui donne plus ou moins de poids à l'une ou l'autre de ces copules: lorsque p tend vers 0, la copule converge vers la copule indépendante, et lorsque p tend vers 1, elle converge vers la copule de *Clayton*. Donc, plus p est grand, plus on s'éloigne de l'indépendance. Or, p diminue lorsque l'année de développement augmente, ce qui confirme que la dépendance diminue quand on s'éloigne de l'année de survenance.

Des simulations ont été effectuées à partir de ces copules. Les résultats pour une compagnie sont synthétisés dans les tableaux 8 et 9.

	$SAP_{\text{indépendance}}$	$SAP_{\text{dépendance}}$
Moyenne	730	731
Variance	5442	7689
Minimum	545	522
Maximum	1115	1224

Tableau 8: Statistiques de base

seuil de probabilité de ruine	provisions à constituer	
	<i>cas indépendant</i>	<i>cas dépendant</i>
15%	803	822
10%	824	848
5%	862	890
1%	942	966
0,1%	1022	1063

Tableau 9: Provisions P à constituer en fonction du seuil α de la probabilité de ruine toléré $P = \text{Inf} \{x / \text{Pr}(SAP > x) \leq \alpha\}$

Il s'agit de la même compagnie utilisée en 3.2, et ces tableaux sont donc à mettre en regard avec les tableaux 4 et 5. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus avec une seule copule pour toutes les années de développement. La variance est cependant plus élevée dans le cas où la dépendance est prise en compte en tenant compte de la spécificité de l'année de développement que dans la cas où la dépendance est modélisée globalement. De même, les quantiles et le maximum sont légèrement plus élevés. Ceci peut s'expliquer par le fait que la dépendance mise en évidence est plus forte pour les années proches de l'année de survenance, et donc pour les montants élevés qui ont un poids plus important dans le montant total des sinistres.

Si l'impact sur la variance est réel, l'effet sur les provisions n'est toutefois pas significatif. Cela est lié aux données utilisées pour estimer les coefficients des copules. Dans le cas dit de la copule par année de développement, chaque coefficient de la copule est estimé à partir des données issues de l'année de survenance correspondante, tandis que dans le cas d'une seule copule, les coefficients sont estimés à partir de toutes les données observées, y

compris les montants des sinistres réglés au cours de leur année de survenance (année de développement 0), alors qu'aucun montant de l'année de développement 0 n'est simulé. Or, c'est au cours de cette année que la dépendance est la plus élevée, si bien qu'en moyenne la dépendance globale des sinistres restant à payer est plus importante que dans le cas d'une copule par année de développement. En résumé, dans le cas d'une copule par année de développement, la dépendance est plus forte sur les montants élevés, et dans le cas d'une seule copule la dépendance moyenne est plus élevée.

5 Un nouveau modèle: crédibilité et dépendance

5.1 Introduction

Le modèle présenté ci-dessous tend à répondre à deux critiques formulées à l'égard des modèles précédents. La première critique consiste à remarquer que lors des simulations d'un élément C_{ij} des parties inférieures aux triangles de liquidation, les informations relatives à cette année de survenance i ne sont pas prises en compte. Si le modèle fait intervenir des coefficients pour l'année de survenance, une partie de l'information est intégrée dans ce coefficient. Mais dans le cas contraire, tous les éléments C_{ij} , pour j fixé, sont simulés suivant la même loi, alors que les éléments déjà connus des lignes du triangle (C_{i0}), pourraient être utilisés pour compléter l'information sur les montants futurs et différencier les simulations selon les années. La seconde critique concerne l'hypothèse d'indépendance de deux éléments qui n'occupent pas des positions similaires dans les triangles de liquidation. Il est en effet plus raisonnable de penser que ce sont les lignes des triangles qui sont dépendantes entre elles, et non les éléments un à un.

C'est pourquoi, afin de prendre en compte ces deux remarques, un modèle inspiré de la théorie de la crédibilité a été mis en œuvre. Cette théorie est classiquement utilisée dans le calcul des coefficients de Bonus-Malus en assurance automobile. Elle consiste à supposer qu'il existe un paramètre caractéristique du risque de l'individu, mais l'assureur ne peut pas l'observer à la souscription du contrat. Mais chaque année, l'observation du nombre d'accidents subis par l'assuré permet à l'assureur d'avoir une idée plus précise de la valeur de ce paramètre, et d'en tenir compte dans l'élaboration du tarif de l'année suivante. Cette idée sera donc appliquée dans le cas des triangles de liquidation en supposant que chaque année de survenance est caractérisée par un paramètre caractéristique de la sinistralité de l'année, mais inobservable, et les montants des sinistres déjà réglés permettront d'obtenir un indicateur de ce paramètre. On essaiera donc de généraliser la théorie de la crédibilité en deux dimensions (un paramètre par branche d'activité) et c'est sur ce couple de paramètres que la dépendance sera modélisée. Ce modèle permet donc, en combinant copule et crédibilité, de présenter de façon réaliste la dépendance entre les triangles de liquidation (ligne à ligne, et non plus élément par élément) et d'utiliser au maximum l'information disponible.

5.2 Hypothèses

On considère deux branches a et b . Dans ce nouveau modèle, on ne suppose plus que les C_{ij} sont indépendants à l'intérieur d'un même triangle quels que soient i et j . On suppose qu'il existe une variable aléatoire δ_i^a (resp. δ_i^b), d'espérance égale à 1, caractéristique de l'intensité de la charge totale des sinistres de l'année i pour la branche a (resp. b). Cette variable ne représente pas le montant total des sinistres de l'année (car elle est choisie d'espérance égale à 1), mais elle constitue un indicateur de la sinistralité.

On supposera:

$$\delta_i^a \sim \gamma(a; a) \text{ et } \delta_i^b \sim \gamma(b; b)$$

et on notera F_a et F_b les fonctions de répartition associées, et f_a et f_b les fonctions de densité.

D'autre part, on supposera que:

$$H1: (\delta_i^u; \delta_i^v) \text{ avec } (u; v) \in \{a; b\}^2 \text{ sont indépendants si } i \neq i',$$

ce qui signifie que les montants de sinistres de deux années différentes sont indépendants. En revanche, pour i fixé, les variables δ_i^a et δ_i^b ne sont pas indépendantes. C'est donc sur cet indicateur de la charge totale des sinistres que l'on modélisera la dépendance entre les branches a et b . En supposant que cette dépendance est identique quelle que soit l'année de survenance, d'après le théorème de Sklar, il existe une unique copule C telle que:

$$P(\delta_i^a \leq x, \delta_i^b \leq y) = C(F_a(x), F_b(y))$$

Remarque: le fait de choisir des lois pour δ_i^a et δ_i^b indépendantes de l'année i oblige à utiliser des montants de sinistres comparables: il faut donc tenir compte de l'inflation, aussi bien monétaire, que technique ou juridique (évolution de la jurisprudence).

On supposera ensuite que les sinistres sont réglés chaque année de manière aléatoire suivant une loi de Poisson conditionnellement aux δ_i^a ou δ_i^b :

$$\begin{aligned} \text{loi de } C_{ij}^a \text{ conditionnellement à } \delta_i^a: C_{ij}^a / \delta_i^a &\sim P(\delta_i^a \exp(\beta_j^a)) \\ \text{loi de } C_{ij}^b \text{ conditionnellement à } \delta_i^b: C_{ij}^b / \delta_i^b &\sim P(\delta_i^b \exp(\beta_j^b)) \end{aligned}$$

où β_j^a et β_j^b sont des paramètres. On suppose donc que chaque année de développement j , en moyenne une même fraction de la charge sinistre est réglée:

$$\text{fraction des sinistres réglés en moyenne pour la branche } b = \frac{\exp(\beta_j^b)}{\sum_k \exp(\beta_k^b)}$$

Avec les données disponibles, on ne peut estimer que les β_j^a et les β_j^b pour j compris entre 0 et 4. Il est donc nécessaire d'utiliser des hypothèses supplémentaires, du type décroissance logarithmique ou exponentielle, pour les autres paramètres. Les β_j^a et β_j^b peuvent être considérés soit comme des paramètres propres aux entreprises, soit comme des paramètres caractéristiques des branches (auquel cas les mêmes paramètres seraient appliqués à toutes les compagnies).

On peut montrer que la loi suivie par les C_{ij} (loi de Poisson composée avec une loi Gamma) est en fait une loi Binomiale Négative. Cependant, l'estimation des paramètres ne peut pas se faire dans les mêmes conditions dans le modèle décrit en 1.3. En effet, les C_{ij} ne sont plus indépendants. L'indépendance n'est valable que conditionnellement aux δ_i^a ou aux δ_i^b .

Les paramètres seront donc estimés à l'aide de la méthode des moments:

$$E(C_{ij}^a) = E[E(C_{ij}^a | \delta_i^a)] = E[\delta_i^a \exp(\beta_j^a)] = \exp(\beta_j^a) E[\delta_i^a] = \exp(\beta_j^a) \forall i$$

$$E[(C_{ij}^a - \exp(\beta_j^a))^2 - C_{ij}^a] = (1/a) \exp(2\beta_j^a) \forall i$$

En utilisant la contrepartie empirique de ces moments, on peut estimer les paramètres:

$$\exp(\hat{\beta}_j^a) = \frac{1}{n_j} \sum_i c_{ij} \quad (n_j = \text{nbre d'observations disponibles pour l'année de développement } j)$$

$$(1/\hat{a}) = \frac{\sum_i \sum_j [(c_{ij} - \exp(\hat{\beta}_j^a))^2 - c_{ij}]}{\sum_i \sum_j \exp(2\hat{\beta}_j^a)}$$

5.3 Choix de la copule

Le choix de la copule représente la première difficulté dans la mise en pratique de ce modèle. En effet, contrairement aux utilisations « classiques » des copules, les réalisations des variables aléatoires δ_i^a et δ_i^b ne sont pas connues. Seules les valeurs des c_{ij} le sont. On ne peut donc pas appliquer les méthodes classiques de façon immédiate. Mais il est toujours possible d'écrire la vraisemblance des observations en introduisant une copule. On obtient alors une expression, certes complexe, mais en théorie possible à maximiser. Cependant, une autre méthodologie, inspirée de la théorie de la crédibilité a été explorée.

La théorie de la crédibilité permet de calculer un prédicteur des δ_i à l'aide des données observées. En effet, il est par exemple possible de calculer la loi de δ_i^a conditionnellement aux observations. On notera $(c_{ij})_{obs}$ les réalisations des C_{ij} observées (notées $(C_{ij})_{obs}$) pour l'année i :

$$l(\delta_i^a / (c_{ij})_{obs}) = \frac{P((C_{ij})_{obs} = (c_{ij})_{obs} | \delta_i^a)}{P((C_{ij})_{obs} = (c_{ij})_{obs})} f_a(\delta_i^a)$$

D'après le modèle, les $(C_{ij})_{obs}$ sont indépendants conditionnellement à δ_i^a . On obtient donc:

$$P((C_{ij})_{obs} = (c_{ij})_{obs} | \delta_i^a) f_a(\delta_i^a) = \prod_{jobs} \frac{\exp(-\delta_i^a \exp(\beta_j^a)) \exp(\beta_j^a c_{ij}^a) (\delta_i^a)^{c_{ij}^a}}{c_{ij}^a!} \frac{a^a}{\Gamma(a)} (\delta_i^a)^{a-1} \exp(-a\delta_i^a)$$

D'où:

$$l(\delta_i^a / (c_{ij})_{obs}) = \exp\left(-\delta_i^a \left(a + \sum_{jobs} \exp(\beta_j^a)\right)\right) (\delta_i^a)^{a + \sum_{jobs} c_{ij}^a} \left(a + \sum_{jobs} \exp(\beta_j^a)\right)^{a + \sum_{jobs} c_{ij}^a} \frac{1}{\Gamma(a + \sum_{jobs} c_{ij}^a)}$$

On reconnaît alors la densité de la loi Gamma suivante:

$$\gamma\left(a + \sum_{jobs} c_{ij}^a, a + \sum_{jobs} \exp(\beta_j^a)\right)$$

Si l'on souhaite effectuer des simulations des sinistres restant à payer, on est donc en mesure d'apporter une précision supplémentaire. On ne se contentera pas de simuler δ_i^a et δ_i^b selon la loi supposée a priori (loi Gamma de paramètre a ou b), mais c'est la loi conditionnelle ci-dessus qui sera utilisée. Mais cette information supplémentaire peut également être utilisée pour estimer le(s) paramètre(s) de la copule recherchée. En effet:

$$E(\delta_i^a / (c_{ij}^a)_{obs}) = \frac{a + \sum_{jobs} c_{ij}^a}{a + \sum_{jobs} \exp(\beta_j^a)}$$

A partir des estimations des paramètres déjà effectuées, l'espérance conditionnelle ci-dessus fournit alors un prédicteur de δ_i^a :

$$\hat{\delta}_i^a = \frac{\hat{a} + \sum_{jobs} c_{ij}^a}{\hat{a} + \sum_{jobs} \exp(\hat{\beta}_j^a)}$$

et on peut montrer que:

$$\hat{\delta}_i^a \rightarrow \delta_i^a \quad \text{et} \quad \hat{\delta}_i^b \rightarrow \delta_i^b$$

On obtient ainsi un échantillon de couples $(\hat{\delta}_i^a, \hat{\delta}_i^b)$ sur lequel on peut calculer un taux de Kendall empirique. En supposant que ce taux de Kendall converge vers le taux de Kendall des (δ_i^a, δ_i^b) , on dispose alors d'un estimateur du taux de Kendall des (δ_i^a, δ_i^b) , à partir duquel on peut retrouver le paramètre de certaines copules. L'utilisation de la théorie de la crédibilité permet donc de substituer des prédicteurs aux δ_i inobservés, et d'estimer ainsi le paramètre des copules. Cependant, la méthode du Maximum de Vraisemblance et la méthode IFM ne peuvent être utilisées puisqu'on ne dispose pas des lois des prédicteurs. Seule la méthode du taux de Kendall est exploitable, ce qui restreint le nombre de familles de copules que l'on peut utiliser (les copules à deux paramètres, telles que la famille *Correlated Frailty*, ne peuvent en particulier pas être exploitées).

5.4 Résultats

Les résultats des estimations par la méthode des moments pour une société particulière et pour les branches $a = RC$ et $b = HRC$, fournit:

$\exp(\hat{\beta}_0^a)$	1211,69	$\exp(\hat{\beta}_0^b)$	1676,49
$\exp(\hat{\beta}_1^a)$	879,29	$\exp(\hat{\beta}_1^b)$	423,54
$\exp(\hat{\beta}_2^a)$	271,56	$\exp(\hat{\beta}_2^b)$	12,94
$\exp(\hat{\beta}_3^a)$	151,34	$\exp(\hat{\beta}_3^b)$	6,00
$\exp(\hat{\beta}_4^a)$	97,84	$\exp(\hat{\beta}_4^b)$	4,88
$1/\hat{a}$	0,0487	$1/\hat{b}$	0,0850

Ces estimateurs permettent de calculer des prédicteurs pour chaque année de survénance, par exemple pour les années 1997 à 2000:

i	$\hat{\delta}_i^a$	$\hat{\delta}_i^b$
1997	1,1440	1,1864
1998	1,1253	1,2137
1999	1,1049	1,2684
2000	1,1109	1,1992

D'où un taux de Kendall (calculé à partir de l'ensemble des années 1991 à 2000):

$$\tau = 0,6111$$

On est ainsi en mesure de retrouver le paramètre correspondant pour certaines familles de copules. On obtient:

Famille	Paramètre de dépendance
<i>Clayton</i>	3,1363
<i>Gumbel</i>	2,5698
<i>Ali-Mikhail-Haq</i>	0,8176
<i>Normale</i>	0,8189
<i>Farlie-Morgenstern</i>	2,7500

Cependant, on peut s'interroger sur la validité de ces estimateurs, vu le faible nombre de données utilisées pour leur obtention. Mais il existe une modélisation qui permet de travailler avec un échantillon de plus grande taille. Il suffit en effet de supposer que pour une branche donnée, les δ_i de toutes les sociétés suivent la même loi (mêmes paramètres a et b pour toutes les compagnies). On estime ainsi pour chaque compagnie des estimateurs des β_j (on peut également supposer que les cadences de règlement sont identiques pour toutes les sociétés, auquel cas les β_j se décomposeraient en $c + \gamma_j$ avec c un terme spécifique à la compagnie, et γ_j un terme identique pour toutes les compagnies), un estimateur pour a et un estimateur pour b . On dispose ainsi d'un couple de prédicteurs par compagnie et par année de survénance (chaque ligne de chaque société est associée à une réalisation indépendante de la variable δ_j). Cette méthode sous-entend donc une hypothèse déjà faite précédemment dans les modélisations, à savoir que la structure de dépendance entre les triangles de liquidation est

caractéristique des branches, et non des sociétés. A partir d'un tel modèle avec des cadences de règlement différentes pour toutes les sociétés, on trouve alors les résultats suivants:

$\tau = 0,4433$			
$1/\hat{a}$	0,0333	$1/\hat{b}$	0,0307

D'où:

Famille	Paramètre de dépendance
<i>Clayton</i>	1,5940
<i>Gumbel</i>	1,7963
<i>Ali-Mikhail-Haq</i>	0,7528
<i>Normale</i>	0,6419
<i>Farlie-Morgenstern</i>	1,9947

Les coefficients obtenus à partir de l'ensemble des sociétés sont donc plus faibles que ceux obtenus au paragraphe précédent à l'aide d'une seule compagnie. Mais il reste difficile de comparer les résultats puisque dans un cas ils sont obtenus à partir d'une dizaine de données (donc peu fiables), et dans l'autre, ils le sont à partir d'un nombre beaucoup plus important. Il est cependant possible d'affirmer que la dépendance entre les variables δ_i (indicateurs de sinistralité) est très forte. Le coefficient de la copule normale par exemple, qui doit être compris entre -1 et 1 , 1 étant la dépendance la plus forte, est de l'ordre de $0,6$. De même, les coefficients des copules de *Gumbel* et de *Clayton* sont plus élevés que ceux obtenus lors de la modélisation de la dépendance sur les éléments des triangles directement. Si toute comparaison entre les résultats de ces deux modélisations n'est pas nécessairement pertinente (ce ne sont pas les mêmes éléments qui sont modélisés !), cela tend tout de même à légitimer la modélisation de la dépendance entre les triangles de liquidation au niveau des lignes de ce triangle, et non élément par élément. Dans les modélisations précédentes, la dépendance existait, mais était difficilement identifiable, alors que cette nouvelle modélisation offre une présentation intuitive de cette dépendance, et la met en évidence de façon très claire.

5.5 Estimation des provisions

Pour estimer les provisions à constituer, la méthodologie est identique à celle utilisée en 3.1. Dans le cas indépendant, on simule la partie inférieure des deux triangles de façon indépendante, à partir des lois connues des C_{ij} . Cependant, les C_{ij} d'un même triangle ne sont pas simulés de façon indépendante. On simule en premier lieu les δ_i , puis les C_{ij} conditionnellement aux δ_i . Mais la théorie de la crédibilité va être utilisée lors de cette simulation. En effet, on peut utiliser les observations disponibles pour simuler les δ_i conditionnellement à ces observations (cette loi conditionnelle est connue, voir ci-dessus).

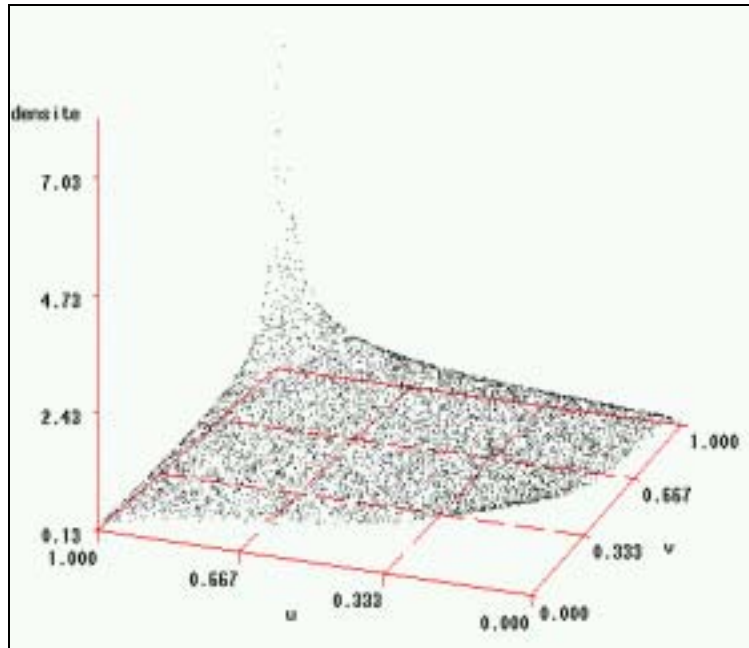
Dans le cas dépendant, on simule le triangle de la branche a , puis celui de la branche b conditionnellement aux simulations de la branche a . Mais la dépendance pourrait intervenir à deux moments au cours de ces simulations: tout d'abord, au moment de la simulation de δ_i^b conditionnellement à δ_i^a , mais également au moment de la simulation de δ_i^a . En effet, on a vu que les résultats de la théorie de la crédibilité permettent d'effectuer les simulations des δ_i conditionnellement aux observations. Or, compte tenu de la dépendance entre les branches a et b , il serait nécessaire d'intégrer l'ensemble des observations (de la branche a , mais aussi de la branche b) pour simuler δ_i^a .

Malheureusement, le calcul de la loi de δ_i^a , conditionnellement aux observations des triangles des branches a et b , ne permet pas de reconnaître une loi classique du fait de l'introduction de la copule, ce qui rend impossible toute simulation de δ_i^a conditionnellement aux observations de la branche a et de la branche b . Cette information supplémentaire apportée par le second triangle ne sera donc pas exploitée dans les simulations, mais c'est un point sur lequel il est possible d'améliorer le modèle qui y gagnerait en précision dans les prédictions. Le tableau 10 présente les résultats de 5000 simulations de sinistres restant à payer d'une société en modélisant la dépendance à l'aide de la famille *Gumbel* (le coefficient de la copule utilisé est celui estimé à partir de l'ensemble des sociétés, c'est-à-dire 1,7963)

	<i>Cas indépendant</i>	<i>Cas dépendant</i>
Moyenne	129,6	129,4
Variance	195,5	220,7
Minimum	83	78
Maximum	187	197
quantile	15%	144
	10%	147
	5%	153
	1%	164
	0,1%	176
	0,01%	183

Tableau 10: Résultats des simulations des sinistres restant à payer Branches RC et HRC

Ces résultats sont comparables à ceux obtenus avec les modélisation précédentes. On retrouve l'augmentation de la variance, et donc de l'incertitude, ce qui se traduit par des quantiles plus élevés dans le cas où la dépendance est prise en compte. L'impact sur les provisions à constituer est également comparable avec celui des modélisations précédentes. Sans infirmer les conclusions tirées précédemment, ce nouveau modèle permet donc de compléter la modélisation de la dépendance entre triangles de liquidation.



Graphe 6: Graphe de la densité de la copule *Gumbel*

Conclusion

La réglementation française impose aux assureurs de constituer des provisions « suffisantes » pour faire face entre autres aux sinistres à payer. Or, les résultats obtenus mettent en évidence une dépendance positive systématique entre les règlements des sinistres des branches Dommage et Responsabilité Civile en automobile. Si ces résultats sont corroborés, il devrait conduire les entreprises à constituer des provisions pour « dépendance de risque entre branches ».

Un modèle basé sur la théorie de la crédibilité, classiquement utilisée en assurance automobile pour le calcul du coefficient de Bonus-Malus a permis une modélisation réaliste de la dépendance entre les triangles de règlement ainsi que de passer outre la difficulté liée à la différence entre les vitesses de règlement des branches. Les résultats obtenus renforcent la mise en évidence de la dépendance positive entre les branches Dommage et Responsabilité Civile en automobile.

Enfin, il serait intéressant de comparer les provisions ainsi déterminées aux provisions effectivement constituées par les assureurs, afin d'étudier les boni et les mali sur ces provisions et la structure financière de l'entreprise.

ANNEXE 1: Expression mathématiques de différentes copules

Famille de copules	$C(u,v)$
<i>Indépendance</i>	uv
<i>Common Monotone C+</i>	$\min(u,v)$
<i>Reverse Monotone C-</i>	$\max(u+v-1; 0)$

Tableau 1: Copules de référence

Famille de copules	$C(u,v)$	Domaine de définition du paramètre
<i>Frank</i>	$(1/\alpha) \ln [1 + (e^{au} - 1)(e^{av} - 1)/(e^\alpha - 1)]$	$\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha \neq 0$
<i>Gumbel</i>	$\exp \{ - [(-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha]^{1/\alpha} \}$	$\alpha \geq 1$
<i>Clayton</i>	$\max \{ 0 ; (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha} \}$	$\alpha \geq -1, \alpha \neq 0$
<i>Ali-Mikhail-Haq</i>	$uv / [1 - \theta(1-u)(1-v)]$	$-1 \leq \theta < 1$
<i>Frailty</i>	$\max \{ 0 ; (u^{1-\exp\alpha} + v^{1-\exp\alpha} - 1)^{1/(1-\exp\alpha)} \}$	$\alpha \in \mathfrak{R}, \alpha \neq 0$
<i>Heavy Right Tail</i>	$u + v - 1 + [(1-u)^{-1/\alpha} + (1-v)^{-1/\alpha} - 1]^{-\alpha}$	$\alpha > 0$
<i>Normale</i>	$H(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v), \rho) (*)$	$-1 \leq \rho \leq 1$
<i>Farlie-Morgenstern</i>	$uv [1 + \alpha(1-u)(1-v)]$	$-1 \leq \alpha \leq 1$

(*) $(X, Y) \rightarrow H(X, Y, r)$ est la fonction de répartition de la loi normale bivariée centrée réduite de corrélation r , et $x \rightarrow \Phi(x)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Tableau 2: Familles de copules à un paramètre

Famille de copules	$C(u,v)$	Domaine de définition des paramètres
<i>Frank Généralisée</i>	$\left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{au^\xi} - 1)(e^{av^\xi} - 1)}{e^\alpha - 1} \right) \right\}^{1/\xi}$	$\alpha \in \mathfrak{R}^*$ $\xi > 0$
<i>Correlated Frailty</i>	$\frac{(uv)^{1-p}}{(u^{-a} + v^{-a} - 1)^{p/a}}$	$0 \leq p \leq 1$ $a > 0$

Tableau 3: Familles de copules à deux paramètres

Bibliographie

- [1] BOUYE E., DURRLEMAN V., NIKEGHBALI A. & RONCALLI T. [2000], *Copulas for finance – A reading guide and some applications*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Working paper, http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/home_copulas.htm
- [2] CARRIERE J.F. [2000], *Bivariate survival models for coupled lives*, Scandinavian Actuarial Journal, Volume 2000, 1, 17-32
- [3] DURRLEMAN V., NIKEGHBALI A. & RONCALLI T. [2000], *Which copula is the right one ?*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Working paper, http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/home_copulas.htm
- [4] EMBRECHTS P., LINDSKOG F. & Mc NEIL A. [2001], *Modelling dependence with copulas and applications to risk management*, Department of mathematics ETHZ, Switzerland, <http://www.risklab.ch/Papers.html#MTLindskog>
- [5] FREES E.W. & VALDEZ E.A. [1998], *Understanding relationships using copulas*, North American Actuarial Journal, 2, 1-25
- [6] GHOUDI K., KHOUDRAJI A. & RIVEST L.P. [1997], *Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles*, Revue canadienne de statistique, 26, 187-197
- [7] HU L. [2002], *Dependence patterns across Financial Markets: Methods and Evidence*, Yale University, Department of Economics, <http://glide.stanford.edu/Ling/papers/copula.pdf>
- [8] LABOUREAU M. & BROCHARD J. [1998], *Estimation du risque lié au calcul des réserves*, Mémoire IAF
- [9] NELSEN R.B. [1999], *An introduction to copulas*, Lectures Notes in Statistics, 139, Springer Verlag, New-York
- [10] TAYLOR G.C. [1984], *Claims reserving in non-life insurance*, North Holland, 1984
- [11] VALDEZ E.A. [2000], *Bivariate analysis of survivorship and persistency*, Research paper, Fourth international congress on insurance, Spain, <http://actuary.web.unsev.edu.au/files/evime2001.pdf>
- [12] VENTER G.G. & CARPENTER G. [2001], *Tails of copulas*, Working Paper, <http://www.casact.org>
- [13] WHITT W. [1976], *Bivariate distributions with given marginals*, The Annals of statistics, Volume 4, Issue 6 (nov. 1976), 1280-1289