Analyse d'un système de sécurité cohérent et optimal pour une compagnie d'assurance IARD

Auteurs : **Christian de LA FOATA**,
Membre de l'Institut des Actuaires Français
24, rue de la fontaine Henri 4
92 370 Chaville
Tel : 00 33 (0)6 07 76 12 46
Email : christian.dlfoata@nomade.fr

Hervé ODJO,
Membre de l'Union Strasbourgeoise des Actuaires
94, rue des Pyrénées
75 020 Paris
Tel : 00 33 (0)1 43 48 09 50
Email : herve.odjo@libertysurf.fr

SUJET : DFA

Résumé :

Ce papier définit un système de sécurité cohérent pour un compagnie d'assurance dommages, comprenant le chargement de prime et le capital. Il analyse ensuite les conditions d'optimalité de ce système compte tenu de la réaction du marché à la politique tarifaire de la compagnie. Partant d'une modélisation sur une période des risques de souscription, leur agrégation puis la résolution du programme d'optimisation mettent en œuvre des techniques numériques et de simulation. Les approches utilisées reposent sur des transformations rapides de Fourier dans le cas d'indépendance des risques, et sur des simulations de Monte Carlo faisant appel à la méthode des copules dans le cas d'interdépendance.

Mots clés : agrégation, capital, chargement de sécurité, copules, Fourier, mesure de risque, Monte Carlo, RoRAC

Une compagnie d'assurance dommages est soumise à un risque de fluctuation exceptionnelle de son résultat, et de défaillance au regard des engagements qu'elle a souscrits. Pour faire face à ce risque, elle dispose, en plus de contraintes réglementaires, d'un système de sécurité comprenant principalement, mais pas uniquement, trois instruments quantifiables : le capital, la réassurance, les chargements de primes. La compagnie doit fixer les paramètres de son système de sécurité en début de période, le fonctionnement de celui-ci dépendra ensuite de la réalisation des risques. Deux propriétés du système de sécurité doivent être recherchées : la cohérence et l'optimalité.

Nous chercherons ici à définir un couple (capital, chargement de sécurité) cohérent et optimal ; les conditions de réassurance seront considérées par simplification comme une donnée. En première partie, la définition des règles de cohérence s'inscrira dans une démarche axiomatique. En seconde partie, l'optimalité sera recherchée à travers l'objectif de maximisation du retour sur capital en tenant compte d'une réaction des assurés par rapport au niveau tarifaire pratiqué : le niveau des primes conditionne le volume de portefeuille suivant une fonction de demande.

La compagnie est confrontée à un grand nombre de risques (risques de souscription, de provisions, d'investissement, de crédit, etc.) et sur une longue période. Nous ne nous intéressons ici qu'au seul risque de souscription que nous développerons à partir d'une modélisation simplifiée sur une période. L'agrégation de ces risques met en œuvre des techniques numériques et de simulation qui seront exposées dans la troisième partie.

Nous discuterons dans la quatrième partie certains compléments pouvant être ajoutés au modèle de base.

A/ Mesures de risque

On appelle risque, une fonction X qui à un état de nature ω associe le réel $X(\omega)$. On pourra formaliser ainsi la charge cumulée de sinistre couverte par une garantie d'assurance, ou le résultat d'une entreprise sur une période donnée. Par convention, on notera dans la suite la charge sinistre comme étant une grandeur positive, et le résultat déficitaire comme une grandeur négative.

On appelle mesure de risque, une fonction ρ associant à un risque X, un réel positif $\rho(X)$. On pourra utiliser de telles fonctions pour déterminer, en reprenant les exemples mentionnés dans le paragraphe précédent, la prime de risque d'un contrat, ou le besoin en capital d'une entreprise.

A.1. Propriétés requises du système de sécurité

Nous posons ici que la cohérence du système de sécurité est définie par :

- la cohérence intrinsèque des mesures de risque utilisées pour le calcul des primes de risque et du besoin en capital,
- le respect du rôle assigné à chaque instrument,

S’agissant du rôle attribué aux instruments, le chargement de prime doit assurer la rémunération de l’actionnaire et limiter les risques liés aux fluctuations de la sinistralité et à l’incertitude sur la mesure, le capital doit au second rang empêcher la ruine ou réduire son amplitude. Nous verrons que cette conception nous conduit à utiliser des mesures de risque reposant sur des principes distincts pour ces deux instruments.

On notera ρ_C (respectivement ρ_P), la mesure de risque utilisée pour la détermination du besoin en capital (respectivement de la prime de risque d’un contrat).

Artzner et al. (1998) définissent la propriété de cohérence comme la combinaison des quatre propriétés suivantes :

Pour deux risques quelconques X et Y

P1 : Invariance par translation
$\rho_C(X+c)=\rho_C(X)-c$, pour toute constante c.
Si on ajoute (resp. on retranche un montant certain c dans les comptes du centre de profit, le besoin en capital décroît (resp. augmente) du même montant.
Notons que dans le cas de la mesure de le prime, la relation deviendrait $\rho_P(X+c)=\rho_P(X)+c$, où c s’interpréterait alors comme une charge certaine.

P2 : Sous-additivité
$\rho_C(X+Y)\leq\rho_C(X)+\rho_C(Y)$
La fusion de deux centres de profit ne crée pas de risque supplémentaire. Au contraire, la diversification tend à réduire le risque global. Par ailleurs, cette propriété permet une gestion décentralisée du besoin en capital dans les différents centres de profit sans courir le risque d’un besoin global supérieur à la somme des besoins individuels des entités. Surtout, si cette propriété n’était pas respectée, un agent, en créant artificiellement deux sociétés pourrait se trouver avec un besoin en capital réduit.

P3 : Homogénéité positive
$\rho_C(\lambda X)=\lambda\rho_C(X),\ \forall\lambda>0$
De même qu’une fusion ne crée pas de risque supplémentaire $(\rho_C(\lambda X)\leq\lambda\rho_C(X))$, de même une fusion sans diversification ne réduit pas le besoin global.
Notons que dans le cadre de la prime, cette propriété induit une invariance par changement d’unité monétaire (Partrat (2000)).

P4 : Monotonie
$X\leq Y \quad\Rightarrow\quad \rho_C(X)\geq\rho_C(Y)$
Si les pertes encourues avec le risque X sont toujours supérieures à celles obtenues avec Y, le besoin en capital pour X doit être supérieur à celui pour Y.
Notons que dans le cadre de la prime, on écrit : $X\leq Y \quad\Rightarrow\quad \rho_P(X)\leq\rho_P(Y)$

Selon Artzner et al. (1998), une mesure de risque vérifiant les propriétés P1, P2, P3, P4 est cohérente.

Certains auteurs ont critiqué ce corps de propriétés. S'agissant de l'homogénéité positive en particulier, on peut soutenir qu'une variation d'échelle du risque peut conduire à un effet plus que proportionnel sur le besoin en capital ou sur la prime. Ceci peut provenir en particulier de contraintes de marché, telles que la difficulté pour se réassurer.

S'agissant de la monotonie, certains auteurs (Wang (1996)) étudiant les principes de prime mettent en avant la propriété de comparaison suivante :

P4 bis : Dominance stochastique d'ordre 2
La mesure du risque X est inférieure à celle de Y si :

- $E[X] \leq E[Y]$
- $\exists\, t_0$ tel que $\begin{cases} S_X(t) \geq S_Y(t) & si\ t < t_0 \\ S_X(t) \leq S_Y(t) & si\ t \geq t_0 \end{cases}$

Cette propriété permet de prendre en compte une hiérarchie de risque qui échappe à la propriété de monotonie. Cependant, elle présente moins d'intérêt lorsqu'on s'intéresse uniquement à la queue de distribution.

D'autres propriétés désirables ont été définies dans la littérature actuarielle (notamment chez certains auteurs déjà cités) :

P5 : Propriété de borne inférieure
$\rho_P(X) \geq E[X]$
Cette propriété est requise en l'absence de subvention croisée entre branches et d'effets de cycle.

P6 : Propriété de borne supérieure
$\rho_C(X) \leq \max(-X)$, ou dans le cas de la prime : $\rho_P(X) \leq \max(X)$

P7 : La mesure est fonction de l'incertitude sur les paramètres
En écrivant que la distribution de X dépend d'un paramètre θ aléatoire, cette propriété s'écrit :
$\rho(X) \geq E_\theta[\rho(X|\ \theta)]$

P8 : Conservatisme
$\rho_C(X) = \rho_C(-X^-)$ où X^- désigne la partie négative de X, $(X^- = \max(-X, 0))$.
Elle est définie par Artzner notamment pour la détermination du besoin en capital, et conduit à ne prendre en compte que les valeurs négatives.

P9 : Le besoin en capital doit tenir compte des amplitudes possibles de la ruine

A.2. Propriétés des principales mesures de risque

- On rencontre les formulations classiques suivantes dans la pratique :

$$\rho_P(X) = E[X] + \lambda\ \sigma(X) \quad (*)$$
$$\rho_P(X) = E[X] + \lambda\ V(X) \quad (**)$$

$\rho_C(X) = \sigma(X)$ (***)

où $\sigma(X)$ désigne l'écart type de X et $V(X)$ sa variance.

Or, on montre que :
(*) ne respecte pas notamment P4, P4 bis,
(**) ne respecte pas notamment P2, P3, P4, P4 bis,
(***) ne respecte pas notamment P1 et P4.

- Le principe de la **probabilité de ruine** est défini par $\rho_C(X) = \inf\{u \in \Re, F_X(-u) \leq \varepsilon\} = u_1$. Dans le cas des variables continues, on a $P\{X < -u_1\} = \varepsilon$.

  Ce principe ne respecte pas P2 et P9. Ainsi, le non respect de P9 a conduit certains auteurs à définir d'autres mesures pour les besoins réglementaires et à utiliser notamment l'Expected Policyholder Deficit (Butsic (1994)). Artzner et al. (1997) ont démontré que P2 n'était pas respectée dans le cas général. Toutefois, Embrechts et al. (1999) ont montré que sur la classe des distributions elliptiques, la Value at Risk respectait les propriétés de cohérence P1, P2, P3 et P4.

- Artzner et al. (1998) ont étudié les propriétés du **principe d'insuffisance** (expected shortfall) défini ainsi : $\rho_C(X) = E[-X \mid X < -u_1]$ avec $P\{X < -u_1\} = \varepsilon$.

  La démonstration des propriétés de cohérence présentée dans Artzner et al. (1997) repose sur une méthode de scénarios généralisés sous l'hypothèse d'un ensemble fini d'états de nature. On montre également que dans le cas des variables continues d'espérance finie, cette mesure de risque respecte les propriétés de cohérence (Odjo (1999)). Nous notons qu'elle respecte également les propriétés P5, P6, P8, P9.

- Wang (1996) a étudié une classe de mesures de risque fondées sur les **opérateurs de distorsion**.

  <u>Définition :</u>
  On appelle opérateur de distorsion, toute application $g : [0,1] \to [0,1]$, croissante et concave telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

  La mesure du risque X fondée sur l'opérateur de distorsion g s'écrit $\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(t))dt$ où $S_X(t) = P\{X > t\}$ désigne la fonction de survie de X.

  Comme rappelé dans Wirsch et al. (1999), cette mesure de risque respecte les propriétés P1, P2, P3. La propriété P4 est immédiate. ρ_g est donc une mesure de risque cohérente. Elle vérifie également les propriétés P4 bis, P5, P6, P7.

  Pour $g(x) = x^r$, $r \in]0,1]$, on retrouve le principe de prime défini par la Ph-transform (Wang (1997)).

Notons que Wirsch et Hardi (1999) ont écrit l'Expected Shortfall sous la forme d'une mesure de risque fondée sur les opérateurs de distorsion dans certains cas.

A.3. Choix des mesures de risque du système de sécurité

Les mesures de risque fondées sur les opérateurs de distorsion présentent donc de bonnes propriétés. Parmi ces mesures, notre choix doit respecter les critères suivants :

- Compte tenu du rôle assigné à chaque instrument, il apparaît naturel d'utiliser une mesure de risque attachée à l'ensemble de la distribution du risque dans le cas du calcul de la prime, et une mesure focalisée sur la queue de distribution dans le cas de la mesure du besoin en capital. Notons à cet égard que l'Expected Shortfall ne s'intéresse qu'à la queue de la distribution et qu'il existe un grand nombre de fonctions de distorsion affectant l'intégralité de la distribution (les opérateurs bêta, le principe de déviation absolue de Dennenberg, etc.). Toutefois, si l'on peut justifier le choix des mesures de risque reposant sur des principes différents, il est souhaitable que celles-ci divergent peu ; or cette propriété dépend de la forme des distributions auxquelles ces deux mesures sont appliquées.

- La simplicité de calcul et d'interprétation font partie des qualités recherchées.

- Enfin, la nature du portefeuille (assurance directe/réassurance, risques de particuliers/risques industriels, etc.) et la forme de l'aversion au risque peuvent conduire à privilégier tel ou tel opérateur de distorsion. On note ainsi que la Ph-transform conduit à surcharger les tranches élevées et qu'elle peut être particulièrement utile pour les grands risques.

Nous retenons dans ces conditions pour notre application le principe d'insuffisance (Expected Shortfall) pour la mesure du besoin en capital et le principe de la Ph-Transform pour la prime de risque.

B. Modélisation et optimisation

B.1. Modélisation

Considérons une compagnie d'assurance non-vie opérant sur m branches d'activité, chaque branche étant elle-même composée de groupes homogènes au sens où les risques sont identiquement distribués à l'intérieur de chaque groupe.

On note n le nombre total de groupes toutes branches confondues et on raisonnera directement au niveau des groupes homogènes de risques.

Par souci de simplification, le modèle considéré est à une période , et n'intègre que le seul risque lié à la charge sinistre de la période de survenance.

Nous faisons les hypothèses suivantes dans le cadre du modèle :

- Le système de sécurité (prime et capital) est détenu en début de période et doit permettre de faire face à l'intégralité des paiements en fin de période.

- Supposons que le besoin en capital en fin de période soit d'un montant u il suffira de détenir $\frac{u}{1+i_0}$ en début de période, i_0 étant le rendement de l'actif dans lequel est investi le capital. Pour des raisons de simplification, nous supposons ici que le capital est investi dans l'actif sans risque.
- Les primes sont déterminées de manière à faire face aux paiements en fin de période sachant qu'elles sont encaissées en début de période et placées au même taux i_0.

Notations

Soient :

- Y_i, la charge moyenne de sinistres par contrat du groupe i sur la période considérée. Le risque du groupe i est caractérisé par la distribution de Y_i,
- X_i, la charge de sinistres du groupe i sur la période considérée : $X_i = N_i Y_i$ où N_i désigne le nombre d'affaires obtenues par l'assureur sur cette période.
- X, la charge globale de sinistre de la compagnie sur cette même période

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} N_i Y_i$$

- Π_i, la valeur en fin de période de la prime totale chargée sur le groupe i
- Π, la valeur en fin de période du montant total des primes : $\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i$
- R, la variable aléatoire représentant le résultat technique de la société sur la période considérée

Pour toute variable aléatoire Z, nous notons

F_Z, sa fonction de répartition $\quad F_Z(x) = P\{Z \le x\}$

S_Z, sa fonction de survie $\quad S_Z(x) = P\{Z > x\} = 1 - F_Z(x)$

Le résultat technique

Pour écrire le résultat technique, on ajoute aux hypothèses précédentes l'équilibre des frais de gestion et le chargement de gestion. En l'absence de réassurance, le résultat de la compagnie sur la période considérée s'écrit :

$$R = \Pi - X$$

Soit P_i, la prime demandée sur chaque contrat du groupe i. Nous supposons que cette prime est identique pour tous les contrats de ce groupe. La prime totale pour le groupe i s'écrit alors $\Pi_i = N_i P_i$, et le résultat de la compagnie sur cette période est :

$$R = \sum_{i=1}^{n} N_i P_i - \sum_{i=1}^{n} N_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} N_i (P_i - Y_i)$$

B.1.1. Calcul de la prime technique

Suivant le choix justifié en **A.**, la fonction de prime appliquée à chaque contrat du groupe i est donnée par : $P_i = P_i(r_i) = H_{r_i}(Y_i) = \int_0^{+\infty} \left(S_{Y_i}(x)\right)^{r_i} dx$

où r_i désigne le paramètre de chargement appliqué au groupe i. Ce paramètre est fixé pour chaque groupe à partir d'une certaine valeur r choisi au niveau de la compagnie. Nous supposerons que le paramètre appliqué à chaque groupe est une fonction de r $r_i = \xi_i(r) \in \left]0,1\right]$, où la fonction ξ_i est fixée au départ de manière à rendre compte notamment de l'expertise de la compagnie sur les différents groupes. On pourra par exemple utiliser une fonction de la forme $\xi_i(r) = r + \eta_i$ où η_i est une constante réelle connue à l'avance et telle que $r_i \in \left]0,1\right]$.

Sous ces hypothèses, le paramètre r définit les chargements appliqués à tous les groupes et donc la politique de tarification de la compagnie.

Pour la suite, nous noterons Θ l'ensemble des valeurs admissibles de r.

Nous supposons en outre que le nombre de contrats N_i obtenus par l'assureur sur le groupe i dépend du niveau de la prime de risque P_i et donc du paramètre r_i. Nous notons ainsi $N_i = \Psi_i(r_i)$, où Ψ_i schématise une fonction de demande d'assurance au sein du groupe i.

La prime étant décroissante par rapport à r_i, la fonction Ψ_i devra être croissante en r_i.

Pour des raisons de simplification, nous choisirons par exemple des fonctions de demande déterministes à élasticité constante par rapport à la prime. Cette fonction de demande est de la forme :

$$\Psi_i(r_i) = \left[N_i^0 \left(\frac{H_{r_i}(Y_i)}{P_i^0} \right)^{-k_i} \right]$$

où $k_i > 0$ désigne l'élasticité du nombre de contrats par rapport au niveau de la prime (à la partie entière près) et $\left(N_i^0, P_i^0\right)$ correspond à la situation antérieure à la période considérée.

Compte tenu de ces hypothèses, le résultat de la compagnie est une fonction du paramètre r et s'écrit alors :

$$
\begin{aligned}
R(r) &= \sum_{i=1}^{n} N_i \; H_{r_i}(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} N_i \, Y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(r_i) H_{r_i}(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(r_i) \, Y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) \int_0^{+\infty} \left(S_{Y_i}(t)\right)^{\xi_i(r)} dt - \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) \, Y_i
\end{aligned}
$$

B.1.2. Calcul du besoin technique en fonds propres (Risk Adjusted Capital RAC)

Comme indiqué plus haut, nous choisissons comme mesure de besoin technique en capital, le principe d'insuffisance.

Par définition,

$u(r) = \rho(R(r)) = E[-R(r) \mid R(r) < -u_1(r)]$ avec $P\{R(r) < -u_1(r)\} = \varepsilon$

où $\varepsilon \in \left]0,1\right[$ est fixée à l'avance par les dirigeants de la compagnie et traduit leur aversion au risque.

$$
\begin{aligned}
& P\{R < -u_1\} = P\{\Pi - X < -u_1\} = \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & P\{X > \Pi + u_1\} = 1 - F_X(\Pi + u_1) = \varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & F_X(\Pi + u_1) = 1 - \varepsilon
\end{aligned}
$$

D'où

$$u_1(r) = F^{*}_{X(r)}(1-\varepsilon) - \Pi(r)$$

$F^{*}_{X(r)}$ désignant la fonction pseudo-inverse de $F_{X(r)}$.
Par définition, $F^{*}_{X(r)}(t) = \inf\left\{x \mid F_{X(r)}(x) \geq t\right\} = \sup\left\{x \mid F_{X(r)}(x) \leq t\right\}$

Le besoin en capital est ensuite donné par :

$$u(r) = \rho(R(r)) = E[-R(r) \mid R(r) < -u_1(r)] = \frac{-E\left[R(r) I_{\{R(r)<-u_1(r)\}}\right]}{P\{R(r) < -u_1(r)\}}$$

où $$I_{\{R(r)<-u_1(r)\}} = \begin{cases} 1 & si \; R(r) < -u_1(r) \\ 0 & dans \; le \; cas \; contraire \end{cases}$$

désigne l'indicatrice de l'événement $\{R(r) < -u_1(r)\}$.

Il vient :

$$u(r)=\frac{-E\left[(\Pi(r)-X(r))I_{\{\Pi(r)-X(r)<-u_1(r)\}}\right]}{\varepsilon}\;=\;-\Pi(r)+\frac{1}{\varepsilon}E\left[X(r)\,I_{\{X(r)>\Pi(r)+u_1(r)\}}\right]$$

$$=-\Pi(r)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Pi(r)+u_1(r)}^{+\infty}x\,dF_{X(r)}(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{F^*_{X(r)}(1-\varepsilon)}^{+\infty}x\,dF_{X(r)}(x)\;-\Pi(r)$$

$$u(r)\;=\;\frac{1}{\varepsilon}\int_{F^*_{X(r)}(1-\varepsilon)}^{+\infty}x\,dF_{X(r)}(x)\;-\Pi(r)$$

Avec les notations et hypothèses faites, le besoin en capital s'écrira alors :

$$\boxed{u=u(r)\;=\;\frac{1}{\varepsilon}\int_{F^*_{X(r)}(1-\varepsilon)}^{+\infty}x\,dF_{X(r)}(x)\;-\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(\xi_i(r))H_{\xi_i(r)}(Y_i)}$$

avec $X(r)\;=\;\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(\xi_i(r))Y_i$,

$$\Psi_i(\xi_i(r))=\left[\;N_i^0\left(\frac{H_{\xi_i(r)}(Y_i)}{P_i^0}\right)^{-k_i}\;\right],$$

$$H_{\xi_i(r)}(Y_i)\;=\;\int_0^{+\infty}\left(S_{Y_i}(x)\right)^{\xi_i(r)}dx$$

B.2. Programme d'optimisation

Nous cherchons ici l'ensemble des couples (chargement de sécurité, capital) tel que le retour sur fonds propres (RoRAC) de la compagnie sur la période soit maximum.

__Définition__

Nous définissons ici le retour sur fonds propres comme le rapport entre le résultat espéré et le besoin en capital. Nous le noterons τ.

$$\tau\;=\;\frac{E[R]}{\rho(R)}=\frac{E[R]}{u}$$

D'après le modèle, il est donné par :

$$\tau = \tau(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) H_{\xi_i(r)}(Y_i) - E\left[\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) Y_i\right]}{\frac{1}{\varepsilon}\int_{F^*_{X(r)}(1-\varepsilon)}^{+\infty} x\, dF_{X(r)}(x) - \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) H_{\xi_i(r)}(Y_i)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r))\left(H_{\xi_i(r)}(Y_i) - E[Y_i]\right)}{\frac{1}{\varepsilon}\int_{F^*_{X(r)}(1-\varepsilon)}^{+\infty} x\, dF_{X(r)}(x) - \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) H_{\xi_i(r)}(Y_i)}$$

$$\boxed{\tau(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r))\left(H_{\xi_i(r)}(Y_i) - E[Y_i]\right)}{\frac{1}{\varepsilon}\int_{F^*_{X(r)}(1-\varepsilon)}^{+\infty} x\, dF_{X(r)}(x) - \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) H_{\xi_i(r)}(Y_i)}}$$

$\tau(r)$ correspond donc au rapport entre la masse du chargement de sécurité appliqué par la compagnie et son besoin en fonds propres. Il est défini par le choix du paramètre r au niveau global de la compagnie.

Le programme d'optimisation sera donc le suivant : quel est le paramètre r que devra choisir la compagnie dans l'ensemble des valeurs admissibles Θ pour maximiser son RoRAC $\tau(r)$?

Le programme :
$$\max_{r\in\Theta} \tau(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r))\left(H_{\xi_i(r)}(Y_i) - E[Y_i]\right)}{\frac{1}{\varepsilon}\int_{F^*_{X(r)}(1-\varepsilon)}^{+\infty} x\, dF_{X(r)}(x) - \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) H_{\xi_i(r)}(Y_i)} \quad (1)$$

C. Agrégation des risques et résolution du programme d'optimisation

C.1. Modélisation des risques de souscription

Pour les besoins du modèle, nous analysons le risque groupe par groupe. Nous considérons que chaque groupe est soumis à trois types de risques :

- T1 : une charge de petits/moyens sinistres qui peut être modélisée par une loi en cloche
- T2 : les grands sinistres par risque
- T3 : les grands sinistres par événement

Nous noterons :
Y_i^1 la charge moyenne par contrat des sinistres ordinaires du groupe i
Y_i^2 la charge moyenne par contrat des gros sinistres affectant le groupe i
Y_i^3 la charge moyenne par contrat des sinistres issus d'événements catastrophiques. En notant κ la variable aléatoire nombre d'événements catastrophiques survenus durant la période, Y_i^3 peut s'écrire $Y_i^3 = \sum_{k=1}^{\kappa} Y_{i,k}^3$ où $Y_{i,k}^3$ est la charge moyenne par contrat des sinistres issus de l'événement k. Pour des raisons de simplification, nous supposons qu'il n'y a qu'un seul type d'événement susceptible de toucher le portefeuille de la compagnie.

La charge moyenne des sinistres par contrat correspond à l'agrégation de ces trois risques
$Y_i = Y_i^1 + Y_i^2 + Y_i^3$

C.2. Agrégation des risques

Le problème d'agrégation se pose à trois niveaux :

- $Y_i^3 = \sum_{k=1}^{\kappa} Y_{i,k}^3$
- $Y_i = Y_i^1 + Y_i^2 + Y_i^3$
- $X(r) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r)) Y_i = \sum_{i=1}^{n} X_i(r)$

Nous utiliserons les mêmes méthodes pour ces trois problèmes d'agrégation. Aussi, pour la clarté de l'exposé, nous ne présenterons par la suite que l'application de ces méthodes à $X(r)$, que nous noterons simplement X .

Nous avons choisi d'utiliser la méthode de transformation rapide de Fourier en cas d'indépendance et les simulations de Monte Carlo avec l'emploi des copules pour caractériser les dépendances.

C.2.1. Cas d'indépendance : La transformation rapide de Fourier

Cette méthode permet d'estimer des distributions agrégées de variables aléatoires indépendantes. Elle repose sur les fonctions caractéristiques des différentes variables en présence.

<u>*Définition*</u> : Soit Y une variable aléatoire et φ_Y sa fonction caractéristique. Par définition,

$$\begin{aligned} \varphi_Y &: \Re \to C \\ t &\mapsto E\left[e^{itY}\right] = \int e^{ity} dF_Y(y) \end{aligned}$$

Elle caractérise complètement la distribution de Y.

La fonction caractéristique de la somme de variables aléatoires indépendantes est le produit de leurs fonctions caractéristiques.

L'agrégation des risques par cette méthode se fait en trois étapes :

- détermination des fonctions caractéristiques des variables à agréger par application de la transformation rapide de Fourier
- calcul de la fonction caractéristique de la variable agrégée par le produit des fonctions caractéristiques des variables concernées
- inversion de celle-ci pour obtenir la distribution agrégée.

Dans le cadre du modèle, la distribution de X sera déterminée de la manière suivante :

- Fonctions caractéristiques des variables X_i

Nous commençons par discrétiser ces variables ; la même discrétisation sera retenue pour toutes les variables X_i et devra couvrir le support de X. Soient L, la valeur maximale prise par X, Γ la discrétisation de l'intervalle $[0, L]$ et h le pas de celle-ci.

$\Gamma = \{x_0, x_1, \dots, x_{M-1}\}$ avec $x_k = k\,h \quad k = 0,1,\dots, M-1$ et $h = \frac{L}{M-1}$, avec M pouvant s'écrire sous la forme $M = 2^v$.

Nous calculons ensuite les vecteurs des probabilités des variables discrétisées que nous notons toujours X_i. Pour $i = 1, \dots, n$ et $k = 0, \dots, M-1$,

$$p_{ik} = P\{X_i = x_k\} = P\left\{\frac{X_i}{h} = k\right\}$$

D'après l'égalité de droite, la distribution de X_i est parfaitement déterminée par celle de $\tilde{X}_i = \frac{X_i}{h}$ et $\tilde{X} = \frac{X}{h} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i$. Ce qui nous permet de travailler directement sur des variables à valeurs entières.

- Détermination des transformées de Fourier des variables $\tilde{X}_i$

Par définition, la transformée rapide de Fourier d'une variable aléatoire Y est une application qui, au vecteur de probabilités $p = (p_0, p_1, \dots, p_{M-1}) \mapsto \tilde{p} = (\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_{M-1})$ défini par

$\tilde{p}_k = \sum_{j=0}^{M-1} p_k\, \omega^{jk}$ avec $\omega = e^{\frac{2\pi i}{M}}$.

Inversement, le vecteur des probabilités peut être déterminé à partir de la transformée de Fourier par l'expression $p_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{p}_k\, \omega^{-jk}$. (2)

- La transformée de Fourier de la variable agrégée $\tilde{X}$ est alors déterminée par produit des transformées de Fourier des variables $\tilde{X}_i$.

- (2) nous permet ensuite de l'inverser pour enfin obtenir la distribution de $\tilde{X}$ et donc celle de X .

C.2.2. Dépendance entre les risques : La simulation aléatoire de Monte Carlo – Les copules

Cette méthode permet de générer des nombres pseudo-aléatoires uniformes sur $]0,1[$ et d'en déduire, par diverses transformations ou divers algorithmes, des quantités suivant une loi définie à l'avance.

De manière générale, on rencontre deux cas à traiter :

- la fonction pseudo-inverse de la loi à générer est explicite. Dans ce cas, c'est la méthode de transformation inverse qui pourrait être appliquée.
- dans le cas contraire, les méthodes de mélange de lois ou d'acceptation / rejet pourraient être utilisées.

Il existe de nombreux générateurs de nombres aléatoires uniformes performants et rapides, possédant une période élevée et de bonnes propriétés statistiques. L'Ecuyer (2000) présente ainsi un générateur combiné à récursivité multiple nommé MRG31k3p dont la période est telle (2^{185}) qu'elle couvre les besoins de toute extension du modèle.

Dans le cadre de notre modèle, la distribution de $X(r)$ sera déterminée en deux étapes :

- on génére un q-échantillon du vecteur $(Y_1,\dots,Y_n)$ en tenant compte de l'interdépendance des composantes, q étant suffisamment grand pour avoir une bonne estimation de la distribution de $X(r)$ pour tout r retenu
- on forme à partir de ce q-échantillon, un autre q-échantillon de $X(r)$ et en déduire sa distribution empirique.

Génération du vecteur $(Y_1,\dots,Y_n)$

Pour simuler le vecteur $(Y_1,\dots,Y_n)$, nous allons séparer la distribution jointe en deux parties :

- la première constituée des distributions marginales $G_i(y_i) = P\{Y_i \le y_i\}, \quad i = 1,\dots,n$
- la deuxième décrivant la structure de la dépendance entre les différentes composantes : leur copule.

<u>*Définition :*</u> Une copule est la distribution d'un vecteur aléatoire $(U_1, \dots, U_n)$ dont les distributions marginales sont uniformes sur $]0,1[$: $C(u_1,\dots,u_n) = P\{U_1 \le u_1, \dots, U_n \le u_n\}$

L'idée est de transformer le vecteur aléatoire $(Y_1,\dots,Y_n)$ en un vecteur aléatoire uniforme $(U_1, \dots, U_n)$ ayant la même structure de dépendance que celui-ci.

Nous retenons ici les copules archimédiennes, et plus précisément, celle de Gumbel, pour caractériser ces dépendances. Par définition, la copule de Gumbel pour un couple de variables aléatoires est donnée par : $C_\theta(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right)$. Le paramètre θ pourra par exemple être fixé à partir du coefficient de rang du couple (leur τ de Kendall) : $\theta = \frac{1}{1-\tau}$.
Un algorithme de génération de vecteurs uniformes à partir de ce type de copule est présenté dans Lindskog (1999).

Le théorème de SKLAR permet, par application des pseudo-inverses des fonctions de répartition marginales, de générer des vecteurs suivant la loi de $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

C.3. Résolution du programme d'optimisation

On cherche ici à maximiser le RoRAC défini par l'équation (1). Cette maximisation ne sera présentée ici que dans le cas de l'utilisation des simulations de Monte Carlo.

Les données du problème :

- nous supposons connue la distribution de $(Y_1, \ldots, Y_n)$, un q-échantillon de ce vecteur aura été préalablement généré
- les paramètres $\varepsilon, N_i^0, P_i^0$, et les fonctions ξ_i

Un algorithme de résolution

Il consiste à discrétiser l'ensemble des valeurs admissibles de r, à calculer la valeur du RORAC par l'équation (1), à comparer les valeurs obtenues de manière à définir l'ensemble des valeurs de r qui maximisent le RORAC. On procédera de la façon suivante :

- définir l'ensemble Θ des valeurs admissibles de r et le discrétiser
- pour chaque valeur $r^{(k)}$ de cette discrétisation
    - évaluer les fonctions $\xi_i\left(r^{(k)}\right)$, $H_{\xi_i\left(r^{(k)}\right)}(Y_i)$ et $\Psi_i\left(\xi_i\left(r^{(k)}\right)\right)$
    - déterminer ensuite la distribution empirique de $X\left(r^{(k)}\right)$
    - évaluer le besoin en fonds propres et donc le RORAC $\tau\left(r^{(k)}\right)$.
- enfin, choisir parmi toutes les valeurs $r^{(k)}$, celles qui maximisent le RORAC.

Deux questions se posent à ce niveau :

- La fonction $\tau(r)$ n'est peut-être pas régulière et l'optimum global pourrait avoir échappé à la segmentation. Dans ce cas, celui-ci peut-être considéré comme étant trop sensible à une variation de paramètres, or la stabilité est une propriété recherchée.

- On doit chercher à minimiser le nombre d 'évaluations du RORAC. En effet l'algorithme proposé ci-dessus consistant à balayer l'ensemble des valeurs admissibles de r devrait entraîner un volume de calcul assez important. Le choix d'algorithmes permettant de minimiser le nombre de valeurs étudiées dépend de la forme de la courbe du RORAC par rapport à r. Lorsque celle-ci est convexe, on pourra par exemple utiliser la méthode de Golden Section pour rechercher l'optimum.

D. Compléments

D.1. La réassurance

Compte tenu de la grande variété des couvertures et des combinaisons possibles, nous avons considéré la réassurance comme une donnée dans le modèle. En la faisant varier, on peut comparer le bilan avantage-coût de différentes options.

Prenons l'exemple de deux formes de traités classiques : la quote part et l'excédent de sinistres. Dans les deux cas, on considère dans notre modèle les paramètres des traités comme donnés :

- taux de cession et taux de commission pour la quote part,
- priorité, plafond et prime demandée par le marché pour l'excédent de sinistres.

Pour la recherche d'une couverture optimale, on peut étudier l'impact d'une variation des programmes de réassurance sur l'évolution du système de sécurité optimal (capital, chargement de sécurité) défini plus haut.

Du point de vue du calcul, l'application du taux de rétention pour la quote part ne pose pas de difficulté.

Dans le cas de l'excédent de sinistre, la prime de marché peut être considérée comme une donnée (connue ou estimée) et exogène au modèle. L'impact du traité de réassurance sur la charge des sinistres doit faire l'objet d'une étude séparée dont les résultats seront intégrés dans le modèle via les distributions des charges moyennes de sinistres par police, telles qu'elles sont définies et utilisées au paragraphe **C.1**. Ainsi, on réalise l'analyse préalable suivante :

- Pour les sinistres de type T2, on écrit leur charge de la manière suivante :

  Pour un volume de portefeuille donné, nous modélisons la charge des gros sinistres du groupe i avant réassurance par un processus composé fréquence / coût : $X_i^2 = \sum_{j=1}^{K_i^2} X_{i,j}^2$ où $X_{i,j}^2$ représente la charge du jème gros sinistre touchant le groupe i, et K_i^2 le nombre de gros sinistres.

L'application de la réassurance en excédent de sinistre se fait sinistre par sinistre. En notant $X'^{2}_{i,j}$ la charge du jème sinistre du groupe i après réassurance, la charge globale de sinistre du groupe i nette réassurance s'écrit $X'^{2}_{i} = \sum_{j=1}^{K_i^2} X'^{2}_{i,j}$.

Le niveau de réassurance étant donné, on en déduit la distribution, nette de réassurance, des charges moyennes de sinistres par contrat (rapport entre X'^{2}_{i} et le volume du portefeuille).

- Pour les sinistres de type T3, nous modélisons aussi la charge globale de sinistres tout événement confondu X^3 par un processus composé fréquence / coût : $X^3 = \sum_{k=1}^{\kappa} X_k^3$ avec $X_k^3 = \sum_{i=1}^{n} X_{k,i}^3$, où $X_{k,i}^3$ désigne l'impact sur le groupe i du kième événement catastrophique.

  L'application de la réassurance se faisant par événement, il est nécessaire de pouvoir répartir, pour chaque événement, la charge globale de sinistres avant et après réassurance et la prime de réassurance entre les différents groupes.

  En ce qui concerne les charges de sinistres, cette répartition pourra être faite à partir d'une matrice donnant, selon le niveau de la charge globale, sa répartition entre les différents groupes. Ainsi, $X'^{3}_{k,i}$ désigne la charge de sinistres nette de réassurance du groupe i relative à l'événement k, et la charge de sinistres catastrophiques du groupe i, nette de réassurance, sur la période considérée est donnée par $X'^{3}_{i} = \sum_{k=1}^{\kappa} X'^{3}_{k,i}$.

  En ce qui concerne les primes de réassurance, on pourra utiliser comme clé de répartition la contribution moyenne de chaque groupe à l'espérance de charge de sinistres sur le traité de réassurance.

  Le niveau de réassurance étant donné, on en déduit la distribution nette de réassurance des charges moyennes de sinistre par contrat (rapport entre X'^{3}_{i} et le volume du portefeuille).

D.2. Prise en compte de l'incertitude sur la distribution du risque dans le besoin en capital

Le modèle simplifié présenté en B.1. ne rend pas compte de l'intégralité du risque au regard duquel le capital doit être défini.

Ainsi, une bonne formulation de l'équation du besoin en capital conduirait à considérer une distribution chargée du résultat. Le besoin en fonds propres s'écrirait donc :

$$u(r) = \rho\left(R^{'}(r)\right) = E\left[-R^{'}(r) \;\middle|\; R^{'}(r) < -u_1^{'}(r)\right] \qquad \text{avec} \qquad P\left\{R^{'}(r) < -u_1^{'}(r)\right\} = \varepsilon$$

où $R^{'}(r) = \Pi(r) - X^{'}(r) = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(\xi_i(r))\left(H_{\xi_i(r)}(Y_i) - Y_i^{'}\right)$

et $Y_i^{'}$ la variable aléatoire telle que $S_{Y_i^{'}}(t) = \left(S_{Y_i}(t)\right)^{r_i} \quad \forall t \geq 0$.

Cette formulation ne met pas en cause la cohérence, au sens défini plus haut, du système de sécurité qui en découle. Elle peut permettre également de réduire l'asymétrie entre les mesures de risques utilisées pour les primes et pour le capital. En revanche, elle rend les calculs plus lourds et complexes.

D.3. L'allocation du système de sécurité par branche

Si tous les marchés étaient parfaits, et l'appréhension du risque identique à toutes les étapes et par tous les agents, on attendrait dans chaque branche un RoRAC identique. Cette propriété ne vient pas naturellement des hypothèses faites dans notre modèle, il importe toutefois de ne pas trop s'en éloigner.

La littérature actuarielle (Schmock (1999) et Odjo (1999)) présente de nombreuses méthodes d'allocation de capital rendant compte des risques propres à chaque branche et de la contribution de chaque branche au risque global.

La définition d'une méthode équitable et efficace d'allocation du système de sécurité devrait compléter ce modèle.

Conclusion

Nous avons ainsi défini un système de sécurité cohérent et optimal dans le cadre d'un modèle intégrant les risques de sinistralité et leurs interdépendances, et en présence d'une réaction des assurés à la politique tarifaire. Dans la pratique, le choix est souvent fait de définitions locales ou partielles des systèmes de sécurité alors que celles-ci peuvent être biaisées ou trompeuses. Le couple de mesures de risque choisi dans cette présentation n'interdit pas un autre choix pourvu que les propriétés requises soient vérifiées. Pour une bonne maîtrise de l'outil, il serait utile de comparer et analyser les résultats issus de choix différents. Nous avons justifié le choix de mesures de risques cohérentes et reposant sur des principes distincts pour le capital et la prime de risque, celles-ci ne doivent toutefois pas être trop divergentes. Les méthodes proposées pour la résolution du modèle pallient l'absence de solution analytique. Dans le cas étudié, ces méthodes requièrent un volume de calcul que les ordinateurs permettent aujourd'hui de réaliser assez rapidement. Toutefois, le modèle considéré est à une période et n'intègre que le risque de souscription, une extension à plusieurs périodes et intégrant davantage de risques (les risques sur les provisions et les investissements notamment) conduirait à un accroissement très rapide de la complexité et du volume de calcul. Il faut noter enfin que la précision du résultat est tributaire des contraintes sur le nombre de scénari réalisables, mais aussi et surtout de la qualité des inputs et hypothèses utilisés, qui dépend elle-même notamment de la quantité et de la qualité des données utilisées pour les estimations.

Bibliographie

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J-M., and Heath, D. (1997) : “Definition of coherent measures of risk “, European Finance Association, Symposium August 27-30

Artzner,P., Delbaen, F., Eber, J-M., and Heath, D. (1997) : “Thinking coherently“ Risk 10 (November)

Artzner,P., Delbaen, F., Eber, J-M., and Heath, D. (1998) : “Coherent Risk Measures” Mathematical Finance

Artzner, P., (1999) : “Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance”, North American Actuarial Journal, April 1999 Volume 3 Number 2

Butsic, R., : (1994), “ Solvency Measurement for Risk-Based Capital Application “ Journal of Risk and Insurance

L’Ecuyer, P., Touzin, R., (2000) : “Fast combined Multiple recursive generators with multipliers of the form $a = \pm 2^q \pm 2^r$ “, Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference

Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann (1999) : “Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls,“ preprint, ETH Zürich.

Lindskog, F., (2000) : “Modelling dependence with copulas and application to risk management“, Risklab, Extended Master Thesis ETH Zürich

Odjo, H., (1999) : “Besoin et allocation de fonds propres pour une compagnie IARD”, mémoire d’actuariat, Université Louis Pasteur

Partrat, Ch. (2000) : Conférence devant la Commission des assurances Dommages de la FFA sur les principes de primes, non publié, Novembre

Schmock, U., (1999) : “Allocation of Risk Capital“, Seminar Presentation, Quantitative Method In Finance 1999 Conference University Of Technology, Sydney, July 17, Risk Theory Tagung, Oberwolfach, September 7

Venter, G.G. (1991) : “Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage” ASTIN Bulletin, 21

Wang, S. (1996) : “Premium calculation by transforming transforming the layer premium density,” Astin Bulletin, vol 26 N1

Wang, S. (1997) : “Implementation of PH-Transforms in ratemaking” Proceedings of Casualty Actuarial Society

Wang, S. (1998) : “Aggregation of correlated Risk Portfolios : Models and Algorithms” Proceeding of the Casualty Actuarial Society

Wirch, J.L., Hardy, M.R. (1999) : ”A synthesis of risk measures for capital adequacy“ Insurance Mathematics and Economics, 25